

## **ANÁLISE NÃO LINEAR DE CÚPULA PELO MÉTODO DE POTRA-PTÁK ASSOCIADO À TÉCNICA COMPRIMENTO DE ARCO**

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Dr. em Métodos Numéricos para Engenharia, UTFPR, Apucarana - PR, lasouza@utfpr.edu.br

Apresentado no  
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2017  
8 a 11 de agosto de 2017 – Belém-PA, Brasil

**RESUMO:** Grande parte dos procedimentos numéricos para a obtenção da trajetória de equilíbrio ou curva força-deslocamento de problemas estruturais com comportamento não linear estático é baseado no esquema iterativo de Newton-Raphson, ao qual estão acoplados os métodos de continuação. Neste artigo, é desenvolvido um algoritmo baseado no método de Potra-Pták, associado à técnica de Comprimento de Arco Linear, para a solução de estruturas de cúpula com comportamento não linear geométrico, cujo caminho de equilíbrio apresenta pontos limites. As análises não lineares são efetuadas por meio do método dos Elementos Finitos Posicional. Os resultados numéricos alcançados evidenciam o melhor desempenho do código computacional implementado, em comparação com as análises feitas com os métodos tradicionais de Newton-Raphson Padrão e Modificado.

**PALAVRAS-CHAVE:** Cúpula, Elementos Finitos Posicional, Comprimento de Arco Linear, não linearidade geométrica, Potra-Pták.

### **NON-LINEAR ANALYSIS OF DOME BY THE POTRA-PTÁK METHOD ASSOCIATED TO THE ARC LENGTH TECHNIQUE**

**ABSTRACT:** A large part of the numerical procedures for obtaining the equilibrium path or load-displacement curve of structural problems with static nonlinear behavior is based on the Newton-Raphson iterative scheme to which are coupled the path-following methods. In this paper we develop algorithm based on the Potra-Pták method, associated to a Linear Arc Length technique, for the solution of dome structures with geometric nonlinear behavior, whose equilibrium path present limits points. Nonlinear analyzes are performed using the Positional Finite Element method. The numerical results achieved show the best performance of the computer codes implemented, in comparison with the analyzes made with the Standard and Modified Newton-Raphson traditional methods.

**KEYWORDS:** Dome, Positional Finite Element, Linear Arc Length, geometric nonlinearity, Potra-Pták.

### **INTRODUÇÃO**

As treliças quando submetidas a grande esforços exibem comportamento não linear e problemas de instabilidade podem surgir, tais como snap-through e snap-back. A trajetória de equilíbrio é amplamente utilizada na análise estrutural para identificar os pontos limites de equilíbrio relacionados à instabilidade. Em geral, essa trajetória é representada por uma curva deslocamento versus força, onde cada ponto na curva representa uma configuração de equilíbrio da estrutura (Lacerda et. al, 2014). Para se realizar a análise não linear de estruturas com maior precisão é de fundamental importância que sejam empregados métodos que possam considerar, de maneira apropriada, os efeitos de grandes rotações e grandes deslocamentos. Uma metodologia eficiente de solução deve ser capaz de superar os problemas numéricos associados ao comportamento não linear, traçando toda a trajetória de equilíbrio do sistema estrutural em análise, identificando e passando por todos os pontos singulares ou críticos que possam existir (Rodrigues et al., 2008; Maximiano et al., 2014).

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural. Modificações nesse método podem ser feitas: resolver o sistema de

equações não lineares de forma inexata, ou seja, resolvê-lo por algum método iterativo impondo uma precisão, como no método de Newton Inexato; aproximar a matriz Jacobiana utilizando diferenças finitas; e substituir a Jacobiana por outra matriz com alguma propriedade, como nos métodos Quase - Newton. No método de Newton-Raphson é resolvido um sistema linear a cada iteração, cuja matriz de rigidez é a matriz Jacobiana avaliada no iterado corrente. Uma das vantagens desse método é a taxa de convergência quadrática (sob condições adequadas) (Eustáquio, 2013).

Até a década de 1980, os métodos iterativos que possuíam ordem de convergência maior que a do método de Newton-Raphson exigiam o cálculo de derivadas de ordens superiores. Sendo assim, quanto maior era a ordem de convergência maior era também o custo computacional destes métodos, tornando o uso prático restrito a alguns casos. Há métodos que possuem taxa de convergência cúbica, como por exemplo o método de Potra-Pták (1984).

Para a concepção de treliças mais leves e eficientes dentro dos padrões de segurança e qualidade, é fundamental o estudo dessas estruturas próximas ao colapso devido a grandes modificações que ocorrem na geometria e a perda de linearidade na relação deformação-tensão. Neste trabalho é apresentado um algoritmo baseado no método iterativo de Potra-Pták com ordem de convergência cúbica, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear (Wempner, 1971; Riks, 1972). Simulações com o software Matlab de um problema de cúpula com comportamento não linear geométrico (grandes deslocamentos e rotações, e pequenas deformações) são efetuadas por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional (Coda & Greco, 2004). A formulação de Elementos Finitos Posicional é uma abordagem alternativa para problemas não lineares, que considera as posições nodais como variáveis do sistema não linear em vez dos deslocamentos. Assume-se que os elementos da treliça tenham comportamento constitutivo elástico linear. Os resultados numéricos evidenciam o melhor desempenho do método de Potra-Pták no problema estudado, em comparação com as análises feitas com os esquemas iterativos de Newton-Raphson Padrão (NR) e Newton-Raphson Modificado (NRM), quanto ao tempo de processamento e números totais de passos de força e iterações acumuladas até a convergência para a solução.

## MÉTODO DE SOLUÇÃO

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico é descrita por (Maximiano et al., 2014):

$$\mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}^{(k-1)}), \quad (1)$$

sendo  $\mathbf{g}$  o vetor de forças desequilibradas,  $\mathbf{F}_{int}$  o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de coordenadas nos pontos nodais da estrutura  $\mathbf{d}$ ), e  $\lambda$  o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor  $\mathbf{F}_r$ , sendo este um vetor de referência e de magnitude arbitrária. A solução do sistema dado em (1) é obtida usando um esquema iterativo e incremental. Para uma sequência do parâmetro de força  $\lambda$ , uma sequência do respectivo incremento de deslocamento  $\mathbf{u}$  é calculado. Considerando-se que  $\lambda$  passa a ser uma incógnita e varia ao longo das iterações, tem-se o problema estrutural não linear dado por:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}^{(k-1)}), \quad (2)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. Os parâmetros totais de força ( $\lambda$ ) e deslocamento ( $\mathbf{u}$ ) no passo de força  $t+\Delta t$  e iteração  $k$  são atualizados por, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (3)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (4)$$

Substituindo a Eq. (3) na Eq. (2) e isolando  $\delta \mathbf{u}^{(k)}$ , chega-se à (Crisfield, 1990):

$$\delta \mathbf{u}^{(k)} = \delta \mathbf{u}_g^{(k)} + \delta \lambda^{(k)} \delta \mathbf{u}_r^{(k)}, \quad (5)$$

na qual  $\delta \lambda^{(k)}$  é o subincremento de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e  $\delta \mathbf{u}_g$  e  $\delta \mathbf{u}_r$  são obtidos, respectivamente, pelas equações:

$$\delta \mathbf{u}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1} \mathbf{g}^{(k)}, \quad (6)$$

$$\delta \mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1} \mathbf{F}_r. \quad (7)$$

Os parâmetros incrementais de força ( $\Delta \lambda$ ) e de deslocamento ( $\Delta \mathbf{u}$ ) no passo de força  $t+\Delta t$  e iteração  $k$  são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta \lambda^{(k)} = \Delta \lambda^{(k-1)} + \delta \lambda^{(k)}, \quad (8)$$

$$\Delta \mathbf{u}^{(k)} = \Delta \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (9)$$

Os autores Potra e Pták (1984) desenvolveram um método de dois passos baseado no método de Newton-Raphson. Consistindo de duas avaliações da função dada e necessitando apenas do cálculo de derivadas de primeira ordem, foi possível obter uma convergência cúbica e um índice de eficiência maior que o do método de Newton-Raphson (Soleymani et al., 2012). O esquema iterativo adaptado ao problema estrutural não linear é dado por:

$$\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})\delta \mathbf{u}^{(k)} = \left( \delta \lambda_1^{(k)} + \delta \lambda_2^{(k)} \right) \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)}), \quad (10)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})^{-1} \left[ \delta \lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \right], \quad (11)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}^{(k)}. \quad (12)$$

O algoritmo referente ao Método de Potra-Pták associado à técnica de Comprimento de Arco Linear é apresentado na Figura 1. Para a análise com o método de Newton-Raphson Padrão, no algoritmo as linhas 18 a 23 não são executadas. No método de Newton-Raphson Modificado, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  é avaliada no início do passo de força corrente ( $k = 1$ ), mantendo-se invariável ao longo do ciclo iterativo ( $k = 2, \dots, i_{\text{máx}}$ ) - as linhas 27, 28 e 18 a 23 do algoritmo não são executadas.

Figura 1. Método de Potra-Pták associado à técnica de Comprimento de Arco Linear.

1. $\mathbf{u} = \mathbf{0}, \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \lambda = 0$	18. $\delta \mathbf{y}_g = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
2. Para $n = 1, \dots, n_{\text{máx}}$	19. $\delta \lambda_2 = -(\Delta \mathbf{u}^{(n)T} \delta \mathbf{y}_g) / (\Delta \mathbf{u}^{(n)T} \delta \mathbf{u}_r)$
3. $\delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}(\mathbf{u})^{-1} \mathbf{F}_r$	20. $\delta \mathbf{u}_2 = \delta \mathbf{y}_g + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{u}_r$
4. $\Delta \lambda = \Delta l / \ \delta \mathbf{u}_r\ $	21. $\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_2$
5. Se $\Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_r < 0$	22. $\Delta \lambda = \Delta \lambda + \delta \lambda_2$
6. $\Delta \lambda = -\Delta \lambda$	23. $\mathbf{g} = (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$
7. Fim-Se	24. Se $\ \mathbf{g}\  \leq \text{tol} \ \mathbf{F}_r\ $
8. $\Delta \mathbf{u}^{(1)} = \Delta \lambda \delta \mathbf{u}_r$	25. Terminar a execução do Para
9. $\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}^{(1)}$	26. Fim-Se
10. $\mathbf{g} = (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$	27. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$
11. Para $k = 1, \dots, i_{\text{máx}}$	28. $\delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
12. $\delta \mathbf{u}_g = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$	29. Fim-Para
13. $\delta \lambda_1 = -(\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \delta \mathbf{u}_g) / (\Delta \mathbf{u}^{(k)T} \delta \mathbf{u}_r)$	30. $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$
14. $\delta \mathbf{u}_1 = \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda_1 \delta \mathbf{u}_r$	31. $\lambda = \lambda + \Delta \lambda$
15. $\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}_1$	32. $\Delta l = \Delta l (Nd/k)^{0.5}$
16. $\Delta \lambda = \Delta \lambda + \delta \lambda_1$	33. Fim-Para
17. $\mathbf{g} = (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$	

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 2 ilustra uma cúpula construída de aço com módulo de elasticidade longitudinal 206,0 GPa. A seção transversal de todas as barras é  $2,16 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ . Na base da treliça há apoios do tipo pino, e uma força vertical  $P$  é aplicada no ápice da mesma. Essa estrutura possui 73 nós, 168 elementos de barra e 147 graus de liberdade. Nas análises foram considerados os parâmetros: comprimento de arco inicial  $\Delta l = 0,01$ ; número de iterações desejadas  $Nd = 3$ ; incremento de força  $\Delta P = 37,5 \text{ kN}$ ; número máximo de iterações  $i_{\text{máx}} = 100$ ; e tolerância  $\text{tol} = 10^{-6}$ . As curvas deslocamento vertical no topo *versus* força obtidas com o algoritmo implementado são mostradas na Figura 3b com dois pontos limites de força, comparando-as com os resultados numéricos de Rezaiee-Pajand et al. (2011). As simulações efetuadas com os códigos desenvolvidos neste trabalho foram conduzidas para além dos pontos de equilíbrio obtidos por esses autores. O ponto (a), na Figura 3b, é um ponto crítico que representa a força máxima em que a estrutura pode suportar antes do *snap-through*. Nas posições intermediárias, a força  $P$  decresce e reverte de sinal duas vezes enquanto o deslocamento vertical continua a crescer. Entretanto, é impossível permanecer em uma das posições intermediárias porque elas são posições de equilíbrio instável. Quando o efeito *snap-through* termina no ponto (b), a estrutura começa a suportar valores adicionais de força. A cúpula indeformada (posição inicial) e deformada (posição final) é exibida na Figura 3a, identificando as barras tracionadas (cor preta) e comprimidas (cor vermelha).

Os números totais de passos de força (NP) e interações acumuladas até a convergência para a solução (kt) e tempo de processamento (em segundos) da simulação com o método de Potra-Pták, comparando-os com os métodos de NR e NRM, são apresentados na Tabela 1. Os resultados numéricos com o método de Potra-Pták mostram que a convergência para a resposta do problema é

alcançada com uma quantidade inferior de incrementos de força e iterações acumuladas necessárias em comparação com os métodos clássicos de NR e NRM, associados à estratégia de continuação Comprimento de Arco Linear. Isso implica na diminuição da quantidade de vezes em que os sistemas de equações lineares (gerados da discretização por Elementos Finitos) são solucionados no processo incremental e, ainda, diminuem-se as atualizações da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e do vetor de força interna  $\mathbf{F}_{int}$  durante o ciclo iterativo.

Nota-se que na iteração do método de Potra-Pták é utilizada a mesma matriz de rigidez para a solução dos sistemas de equações lineares; assim, estes sistemas podem ser solucionados via decomposição (por exemplo, decomposição LU ou fatoração de Cholesky), visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária. Deve-se ressaltar, entretanto, que o problema numérico resolvido é de pequena escala no contexto computacional atual, pois possui menos de 150 graus de liberdade. Para sistemas dessa ordem de grandeza, métodos diretos costumam ser mais eficientes. Os métodos iterativos de solução (por exemplo, o método dos Gradientes Conjugados) são vantajosos quando os problemas tiverem um número maior de graus de liberdade e recursos de alocação de memória.

Figura 2. Modelo estrutural da cúpula com 73 nós.

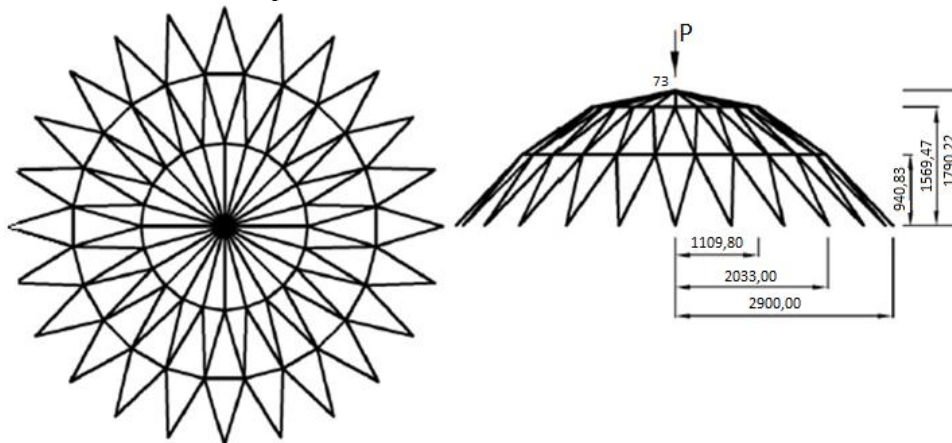


Figura 3. a) Configurações indeformada (posição inicial) e deformada da cúpula; e b) trajetórias de equilíbrio.

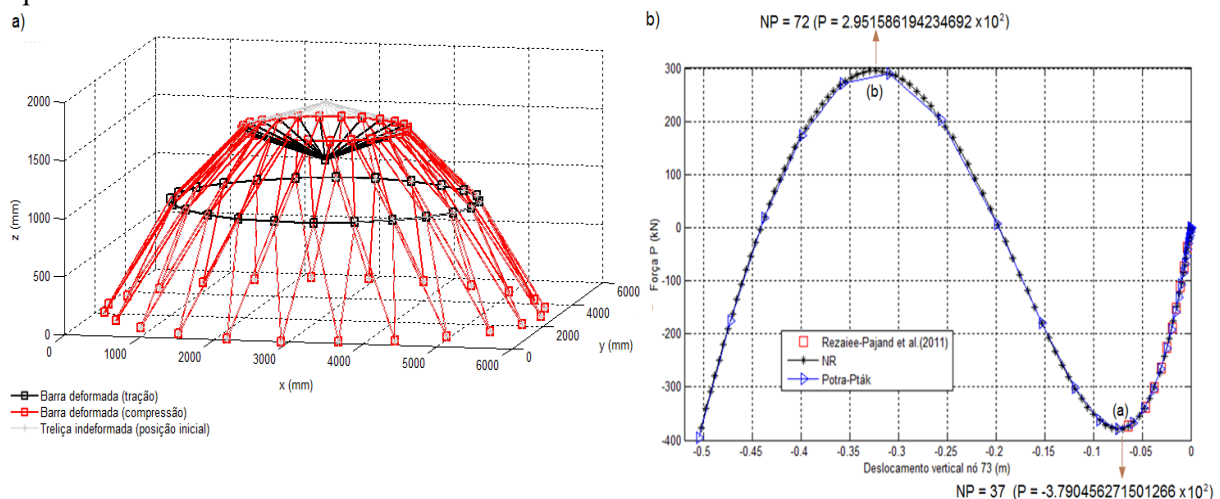


Tabela 1. Resultados numéricos.

Métodos	Número de Passos de Força (NP)	Número de Iterações (kt)	Tempo de Processamento (s)
NR	105	284	3,743345
NRM	947	2822	26,434503
Potra-Pták	36	70	1,619082

## CONCLUSÕES

Neste artigo foi apresentado o algoritmo e a formulação de um esquema iterativo baseado no método de Potra-Pták, acoplado à estratégia Comprimento de Arco Linear, para a solução de problemas de treliças espaciais com não linearidade geométrica. A falha de um sistema estrutural esbelto devido à perda de estabilidade causa frequentemente a diminuição da segurança e da confiabilidade.

Nas simulações não lineares de problemas de estruturas num processo incremental e iterativo, resolver o sistema de equações lineares gerado a cada iteração pela formulação de Elementos Finitos é, em geral, o passo mais caro e que demanda maior tempo e esforço computacional durante o processamento. A análise numérica efetuada com o código computacional desenvolvido em ambiente Matlab mostrou-se promissora, visto que a solução do problema foi alcançada com um menor número de passos de força e de iterações acumuladas para a precisão requerida e, conseqüentemente, com um menor tempo de processamento, em comparação com os métodos clássicos de Newton-Raphson Padrão e Newton-Raphson Modificado.

Como pesquisa futura, sugere-se: a resolução de problemas de estruturas com mais graus de liberdade para ilustrar o ganho de tempo; implementar algoritmos que permitam efetuar ciclos de carregamento e descarregamento; considerar a não linearidade física; e adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica.

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece à UTFPR pelo apoio para o desenvolvimento desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- Coda, H. B.; Greco, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, England, v. 193, p. 3541-3557, 2004.
- Crisfield, M. A. A Consistent Corotational Formulation for Non-Linear, Three-Dimensional, Beam-Elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 81, n.2, p. 131-150, 1990.
- Eustáquio, R. G. Classe de métodos Chebyshev-Halley inexata livre de tensores com convergência cúbica para resolução de sistemas não lineares e um estudo sobre raio de convergência. Curitiba: Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2013. Tese (Doutorado em Ciências).
- Lacerda, E. G. M.; Maciel, D. N.; Scudelari, A. C. Geometrically static analysis of trusses using the arc-length method and the positional formulation of Finite Element Method. In: XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2014. Anais... Evandro Parente Jr (Editor), ABMEC, Fortaleza, CE, Brazil, 2014.
- Maximiano, D. P.; Silva, A. R. D.; Silveira, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. *Revista Escola de Minas (Impresso)*, v. 67, p. 143-150, 2014.
- Potra, F. A.; Pták, V. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. *Research Notes in Mathematics*, 103, 1984.
- Rezaiee-Pajand, M., Sarafrazi, S.R.; Rezaiee, H. Efficiency of dynamic relaxation methods in nonlinear analysis of truss and frame structures. *Computers and Structures*, v. 112-113, p. 295-310, 2011.
- Riks, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, v. 39, n. 4, p. 1060-1066, 1972.
- Rodrigues, P. F. N.; Varela, W. D.; Souza, R. A. Análise de Estratégias de Solução do Problema Não-linear. *Revista de Ciência & Tecnologia*, v. 8, n. 2, p. 36-49, 2008.
- Soleymani, F.; Sharma, R.; Li, X.; Tohidi, E. An optimized derivative-free form of the Potra-Pták method. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 56, n. 5-6, p. 97-104, 2012.
- Wempner, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, v. 7, p.1581-1599, 1971.