

## **APLICAÇÃO E ANÁLISE DO MEFG COM ENRIQUECIMENTO POLINOMIAL PARA DIFERENTES TIPOS DE ELEMENTOS FINITOS**

GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA<sup>1\*</sup>; JOSÉ FABIANO ARAÚJO MOREIRA<sup>2</sup>

<sup>1</sup>MSc. em Estruturas e Construção Civil, Prof. IFPI, Floriano-PI, guiofp988@gmail.com;

<sup>2</sup>Doutorando em Estruturas e Construção Civil, UnB, Brasília-DF, jf\_moreira1991@hotmail.com;

Apresentado no  
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2018  
21 a 24 de agosto de 2018 – Maceió-AL, Brasil

**RESUMO:** O Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) é uma variação do Método dos Elementos Finitos (MEF) convencional. Este trabalho objetivou analisar a aplicação de funções de enriquecimento polinomiais, conforme a estratégia do MEFG, para a avaliação de estruturas utilizando elementos triangulares e quadriláteros e, desta forma, verificar a influência do tipo de elemento na resposta. Foram feitas doze discretizações do modelo, seis para cada tipo de elemento finito e, então, foram feitas simulações utilizando enriquecimento polinomial. As respostas obtidas foram comparadas com uma solução de referência analítica. Os resultados demonstraram que o MEFG com enriquecimento polinomial é muito eficiente, tendo em vista o nível de aproximação atingido em relação à referência, mesmo utilizando malhas grosseiras. Além disso, o MEFG mostrou-se capaz de reduzir as desvantagens do elemento triangular frente ao quadrilátero.

**PALAVRAS-CHAVE:** Elementos Finitos. MEFG. Enriquecimento. Estruturas.

## **APPLICATION AND ANALYSIS OF GFEM WITH POLYNOMIAL ENRICHMENT FOR DIFFERENT TYPE OF FINITE ELEMENTS**

**ABSTRACT:** The Generalized Finite Element Method (GFEM) is a variation of the conventional Finite Element Method (FEM). This work aimed to analyze the application of polynomial enrichment functions, according to the GFEM strategy, for the evaluation of structures using triangular and quadrilateral elements and, in this way, verify the influence of the type of element in the response. Twelve discretizations of the model were made, six for each type of finite element, and then simulations were made using polynomial enrichment. The obtained responses were compared with an analytical reference solution. The results showed that the GFEM with polynomial enrichment is very efficient, considering the level of approximation reached in relation to the reference, even using coarse meshes. In addition, the GFEM was able to reduce the disadvantages of the triangular element compared to the quadrilateral.

**KEYWORDS:** Finite Elements. GFEM. Enrichment. Structures.

### **INTRODUÇÃO**

O MEF é a ferramenta numérica mais utilizada na mecânica computacional para modelar e prever o comportamento de estruturas e materiais. Porém, diante de problemas de valor de contorno (PVC) específicos, tais como problemas de propagação de trincas, esse método não modela eficientemente o fenômeno analisado (Belytschko e Black, 1999; Duarte *et al.*, 2001). A obtenção de uma aproximação de resposta mais eficiente, em casos como os citados era, em geral, vinculada à processo de remalhamento constantes, tornando inviável as simulações devido o custo computacional envolvido. O elevado refinamento de malha, outra condição para tornar mais precisa a resposta, também é um fator que encarece computacionalmente o processo de investigação.

O objetivo de ultrapassar as dificuldades apresentadas pelo MEF diante de certos tipos de análises ensejou muitos trabalhos nos últimos anos (Duarte e Oden, 1995; Belytschko e Black, 1999; Moës *et al.*, 1999). A partir dessas pesquisas surgiram métodos numéricos alternativos, tais como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Strouboulis *et al.*, 2000a; Strouboulis *et al.*,

2000b; Duarte *et al.*, 2001; Pereira *et al.*, 2009b; Paiva *et al.* 2016) e o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFX) (Moës e Belytschko, 2002; Huang *et al.*, 2003; Belytschko *et al.*, 2009; Gupta e Duarte, 2016; Moreira *et al.* 2016).

## MATERIAL E MÉTODOS

O MEF é um método geral poderoso de análise baseado na subdivisão do domínio analisado. O método possui duas características essenciais: i) divisão de uma geometria complexa em subdomínios mais simples (elementos); ii) os elementos são localmente analisados e, então, são alocados em sua posição global dentro do domínio e, assim, calcula-se a solução geral do PVC (Reddy, 2006).

O MEFG é uma variação do MEF convencional que foi inicialmente proposto por Babuška *et al.* (1994) sob a denominação de Método dos Elementos Finitos Especiais. Em suma, trata-se de uma forma distinta de geração das funções de forma dos elementos finitos (Pereira *et al.*, 2009a) a partir do emprego de funções de forma não convencionais (“especiais”). Tal estratégia fora mencionada em 1995 como uma proposta de método sem malha sob a denominação de Método das Nuvens hp (Duarte e Oden, 1995). Nesse mesmo ano, Melenk (1995) desenvolveu todo o arcabouço matemático do método.

A construção das funções de forma do MEFG ( $\varphi_{\alpha i}$ ), matematicamente, resume-se a uma combinação, em cada nó  $x_{\alpha}$  do domínio, entre as funções de forma padrão do MEF ( $N_{\alpha}$ ) e funções especiais  $L_{\alpha i}$  chamadas funções de enriquecimento. Sendo  $L_{\alpha i} = \{1, L_{\alpha 1}, L_{\alpha 2}, \dots, L_{\alpha q}\}$  uma base geradora para um espaço funcional, as funções de forma  $\varphi_{\alpha i}$  (também chamadas de funções produto) correspondentes ao nó  $x_{\alpha}$  são construídas da seguinte maneira:

$$\varphi_{\alpha i} = N_{\alpha} \cdot L_{\alpha i} \quad \text{Eq. 1}$$

A aproximação do campo de deslocamentos é obtida a partir da seguinte combinação linear, onde  $N_{\alpha}(x)$  refere-se ao MEF, e  $N_{\alpha}(x) \cdot L_{\alpha i}(x)$  refere-se ao MEFG:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\alpha=1}^n N_{\alpha}(x) \cdot \left\{ a_{\alpha} + \sum_{i=2}^q L_{\alpha i}(x) \cdot b_{\alpha i} \right\} \quad \text{Eq. 2}$$

onde  $a_{\alpha}$  são os graus de liberdade da estrutura associados ao nó  $x_{\alpha}$  e  $b_{\alpha i}$  os graus de liberdade adicionais correspondência a cada função de enriquecimento.

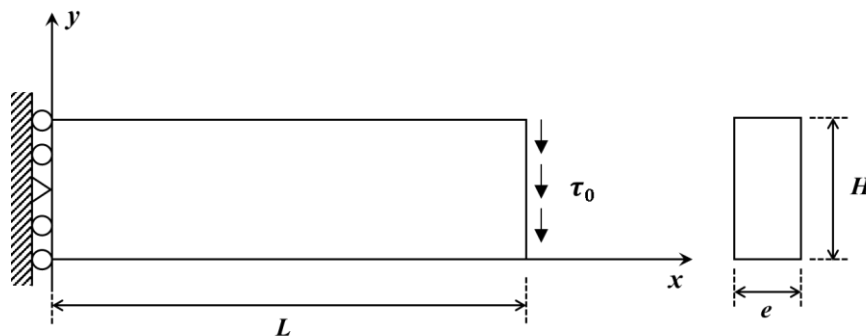
As funções  $L_{\alpha i}$  da Eq. 2 podem ser de base polinomial ou não. Comumente escolhe-se as polinomiais devido a relativa facilidade de implementação. Podem ser construídas de forma hierárquica tendo como regra o triângulo de Pascal. As funções utilizadas neste trabalho baseiam-se no seguinte formato:

$$L(m, n) = \frac{x^m y^n}{h^{m+n}} \quad \text{Eq. 3}$$

sendo  $m$  e  $n$  os expoentes obtidos do triângulo de Pascal e  $h$  uma variável normalizadora.

Utilizando tais funções, segundo a estratégia do MEFG, analisou-se uma viga engastada e livre, com carregamento distribuído na face livre, conforme a Figura 1. Dimensões, carregamento, condições de contorno e propriedades mecânicas são as seguinte (em unidades consistentes):  $L = 10$ ;  $H = 2$ ;  $e = 1$ ; Módulo de Elasticidade  $E = 30 \text{ E}+06$ ; Coeficiente de Poisson  $\nu = 0,25$ ; Condições de contorno  $u_x(0,y) = u_y(0;1) = 0$ ; Carga  $\tau_0 = 150$ .

Figura 1. Viga engastada e livre – geometria, carregamento e condições de contorno.



A solução de referência para o deslocamento ( $u_y$ ) segundo a teoria de Euler-Bernoulli, é a seguinte ( $I$  é a Inércia da seção transversal):

$$u_y \left( 10; \frac{h}{2} \right) = - \left( \frac{f_y L^3}{3EI} \right) \left[ 1 + \frac{3(1 + \nu)}{L^2} \right] \quad Eq.4$$

Efetuada-se os cálculos, têm-se que o valor de referência para o deslocamento no ponto determinado é  $u_y(10,1) = 5,188 \text{ E-}03$ .

Foram, então, realizadas doze discretizações regulares e estruturadas do modelo: seis utilizando elementos triangulares de três nós (com 2, 4, 8, 16, 32 e 64 elementos) e outras seis com elementos quadrilaterais de quatro nós (com 1, 2, 4, 8, 16 e 32 elementos). Nota-se que todas as malhas são bem grosseiras. Todos os elementos têm como características possuir espessura constante e serem constituídos de material homogêneo isotrópico. Iniciando da malha mais grosseira (malha I) até a malha mais refinada (malha VI) foram realizadas simulações sem enriquecimento (denominadas *P0*).

Da mesma forma, utilizando as mesmas malhas, foram feitas simulações com aplicação de funções de enriquecimento polinomiais de graus um, dois, três, quatro e cinco (aproximações *P1*, *P2*, *P3*, *P4* e *P5*, respectivamente). Em respeito às condições de contorno de *Dirichlet*, os nós das arestas engastadas não foram enriquecidos. A integração numérica do domínio seguiu a regra de *Gauss-Legendre* mínima.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

As Figuras. 2 e 3 apresentam (para malhas triangulares e quadrilaterais, respectivamente) os gráficos correspondentes ao Erro Relativo ( $e_r$ ) em função do tamanho equivalente do elemento ( $h_{eq}$ ), para os diferentes refinamentos de malha segundo cada ordem de enriquecimento. O  $e_r$  foi calculado tanto com relação ao valor de referência para o deslocamento na extremidade livre mencionado anteriormente, sendo  $h_{eq} = [(L \text{ da viga}) / (\text{n}^\circ \text{ de elementos})]$ .

As Figuras 2 e 3 demonstram que conforme aumenta o nível de refinamento da malha ocorre uma redução do  $e_r$ , como era esperado, mesmo para uma aproximação *P0*. Neste caso, porém, observa-se que quando fora utilizado elementos triangulares a solução não atingiu um nível de convergência razoável (com  $e_r$  de 45% aproximadamente). Em contrapartida, com elementos quadrilaterais, o  $e_r$  aproximou-se de 5%. Isto ocorre porque o elemento triangular, cuja funções de forma associadas são lineares, é mais “pobre” que o quadrilateral, com funções de forma quadráticas.

Observa-se, contudo, que o MEFG potencializa a precisão da resposta, independente da ordem polinomial de enriquecimento utilizada (*P1* a *P5*). Nota-se ainda que o refinamento de malha associado ao aumento do grau polinomial das funções enriquecedoras, contribuíram para a convergência alcançar nível satisfatória (com  $e_r < 1\%$  em alguns casos).

Verifica-se ainda que, a partir do grau de enriquecimento *P2*, já é possível encontrar um  $e_r$  aceitável devido ao produto da PU linear do elemento triangular com funções de enriquecimento *P2* aproximar-se do grau da equação de governo do problema. Desta forma, o MEFG contribui para minimizar as vantagens do elemento quadrilateral sobre o triangular no tocante à capacidade de aproximação da resposta.

Figura 2. Erro Relativo para cada ordem polinomial de enriquecimento – elementos triangulares

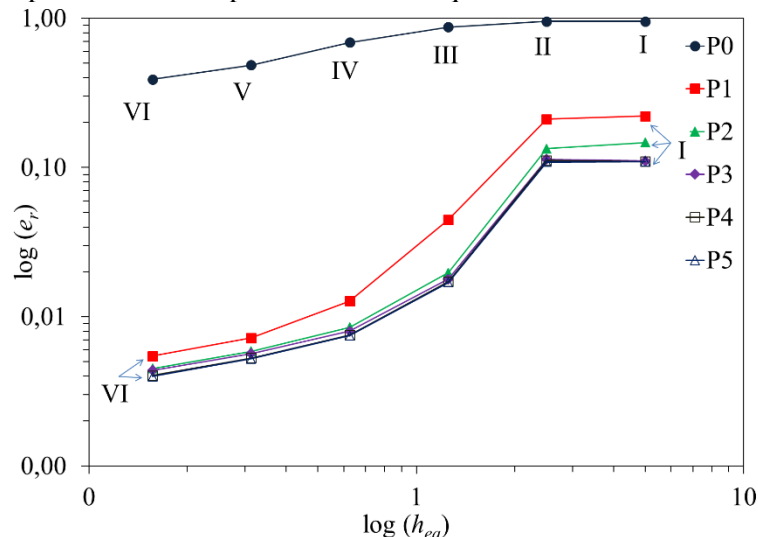
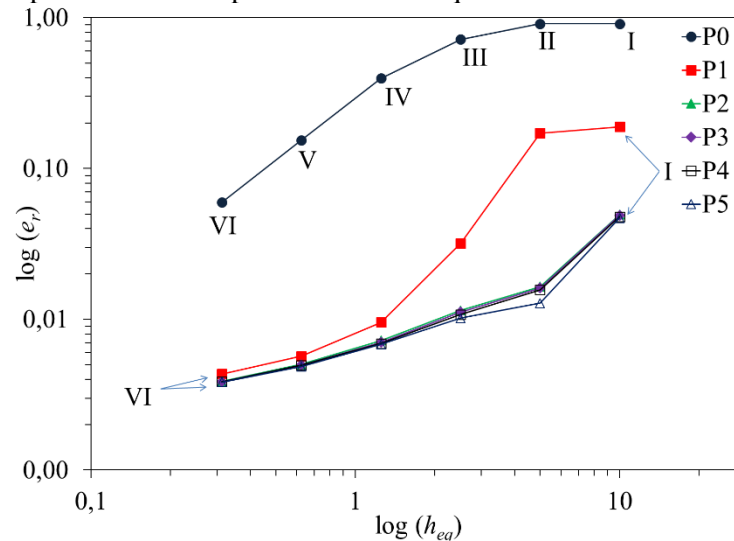


Figura 3. Erro Relativo para cada ordem polinomial de enriquecimento – elementos quadrilaterais



## CONCLUSÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados apresentou grande eficiência. Observa-se que os resultados atingiram nível de aproximação razoável em relação à referência devido a utilização do enriquecimento, mesmo utilizando malhas grosseiras. Destaca-se a ótima resposta para a Malha I, onde com apenas 01 elemento alcançou-se uma solução bem próxima da analítica com a utilização de enriquecimento de quinto grau.

É evidente que, devido ao funcional mais simples dos elementos, as malhas triangulares apresentam um nível de convergência inicial abaixo do apresentado pelas malhas quadrilaterais. O MEFGE, contudo, mostrou-se capaz de reduzir as desvantagens do primeiro frente ao último, apresentando ambos, ao final, níveis de  $e_r$  muito próximos.

## AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela concessão de bolsa de pesquisa aos autores e ao Instituto Federal do Piauí (IFPI), instituição de trabalho do primeiro autor.

## REFERÊNCIAS

- Babuška, I., G. Caloz e J. E. Osborn. “Special Finite Element Methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients.” Em: *Journal on Numerical Analysis*, 1994.
- Belytschko, T.; Black, T. “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.” Em: *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 45, 601—620, 1999.
- Belytschko, T.; Gracie, R; Ventura, G. “A review of extended/generalized finite element methods for material modeling.” Em: *Modeling and Simulation in materials Science and Engineering*, 17, 1—24, 2009.
- Duarte, C. A.; Oden, J. T. “An h-p Meshless Method”. Em: *Texas Institute for Computation and Applied Mathematics*. 1995.
- Duarte, C. A.; Hamzeh, O. N.; Lyszka, T. J.; Tworzydło, W. W. “A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional crack propagation.” Em: *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, pp. 2227–2262, 2001.
- Gupta, V.; Duarte, C. A. “On the enrichment zone size for optimal convergence rate of the Generalized/Extended Finite Element Method.” Em: *Computers and Mathematics with Applications*, 72, pp. 481–493, 2016.
- Huang, T.; Sukumar, N.; Prévost, J. H. “Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical applications.” Em: *International Journal of Solids and Structures*, 40, pp. 7539–7552, 2003.
- Melenk, J. M. “On Generalized Finite Element Methods”. Dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School. of The University of Maryland at College Park. 1995.

- Moreira, J. F. A.; Evangelista Jr, F. “Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais quase-frágeis.” Em: XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016.
- Moës, N.; Belytschko, T.. “Extended finite element method for cohesive crack growth.” Em: Engineering Fracture Mechanics, 69, 813—833, 2002
- Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T. “A finite element method for crack growth without remeshing.” Em: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, 131—150, 1999.
- Strouboulis, T.; Babuška, I.; Copps, K. “The design and analysis of the generalized finite element method.” Em: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 181, 43—69, 2000a.
- Strouboulis, T.; Copps, K.; Babuška, I. “The Generalized Finite Element Method: an example of its implementation and illustration of its performance.” Em: International Journal for Numerical Methods in Engineerin, 47, pp. 1401–1417, 2000b.
- Paiva, G. O. F. de; Moreira, J. F. A.; Alves, G. de S.; Evangelista Jr, F. “Estudo do enriquecimento polinomial para a análise de estruturas em processo de danificação.” Em: XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computational Methods in Engineering, 2016.
- Pereira, J.; Duarte, C. A.; Jiao, X.; Guoy, D. “Generalized finite element method enrichment functions for curved singularities in 3D fracture mechanics problems.” Em: Computational Mechanics, 44, pp. 73–92, 2009a.
- Pereira, J. P.; Duarte, C. A.; Guoy, D.; Jiao, X. “hp-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks.” Em: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 77, pp. 601–633, 2009b.
- Reddy, J. N. An Introduction to The Finite Element Method. 3rd. ed. [S.l.]: Mc Graw-Hill series in mechanical engineering, v. ISBN 0-07-246685-5, 2006.