

## **MÓDULO DIDÁTICO PARA ENSINO DE TEORIA DE ESPAÇO DE ESTADOS APLICADA A SISTEMAS DE CONTROLE**

**RAFAEL PRADO GUILHERME DOS SANTOS<sup>1\*</sup>; ARMANDO TADAO GOMES NAKAMARU<sup>2</sup>; RAFAEL MENDES HIRAYAMA MACHADO<sup>3</sup>; WESLEY TAVARES BARBOSA<sup>4</sup>; ORLANDO FONSECA SILVA<sup>5</sup>**

<sup>1</sup>Graduando de Engenharia Elétrica. Bolsista do PET-Engenharia Elétrica, UFPA, Belém-PA, rafael\_prado22@hotmail.com;

<sup>2</sup>Graduando de Engenharia Elétrica, UFPA, Belém-PA, tadaonakamaru@gmail.com;

<sup>3</sup>Graduando de Engenharia Elétrica, UFPA, Bolsista do PET-Engenharia Elétrica, Belém-PA, machadoraf14@gmail.com;

<sup>4</sup>Graduando de Engenharia Elétrica, UFPA, Belém-PA, wbartav@gmail.com;

<sup>5</sup>Dr. em Engenharia de Produção. Prof. Titular. ITEC, UFPA, Belém-PA, orfosi@ufpa.com;

Apresentado no

Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2018  
21 a 24 de agosto de 2018 – Maceió-AL, Brasil

**RESUMO:** Este trabalho objetivou desenvolver uma ferramenta capaz de auxiliar discentes de diversos cursos de graduação em Engenharia, em especial de Engenharia Elétrica, na área de controle moderno de sistemas dinâmicos. Elaborou-se um módulo didático, com componentes eletrônicos de fácil aquisição, próprio para representar uma grande variedade de sistemas, em espaço de estados, por meio de dois circuitos eletrônicos. O primeiro destes circuitos pode emular plantas até quarta ordem com três zeros e o segundo funciona como um servossistema para atuar em problemas de regulação e rastreamento via espaço de estados. Uma fonte simétrica foi desenvolvida para suprir a necessidade de alimentação dos circuitos integrados que compõem o módulo, que são, em sua maioria, amplificadores operacionais. Além disso, foi criado um circuito regulador para fornecer uma referência degrau ao sistema. O circuito foi simulado computacionalmente e o módulo foi testado, na prática, em placas de prototipagem.

**PALAVRAS-CHAVE:** Controle moderno, espaço de estados, variedade de sistemas, módulo didático.

### **DIDACTIC MODULE FOR STATE SPACE THEORY TEACHING APPLICATED AT CONTROL SYSTEMS**

**ABSTRACT:** This paper aimed develop a tool able to assist students of various degree courses in engineering, especially in electrical engineering, in the area of modern control of dynamics systems. It was elaborated a didactic module, made with easily purchased electronic components, capable of representing a wide variety of systems, in space of states, through two electronic circuits, being the first one for the simulation of a plant up to fourth order and the second is a servo system to act on regulation and tracking problems. Hence, a symmetrical source was developed to supply the power needs of the integrated circuits that make up the module, which are, for the most part, operational amplifiers. Moreover, a regulator circuit has been created to provide a step reference to the system. The circuit was simulated computationally and the module was tested in practice on prototype boards.

**KEYWORDS:** Modern control, very large systems variety, didactic module.

### **INTRODUÇÃO**

Até a década de 70, havia muitos obstáculos entre a teoria e a prática no projeto de controladores (DOYLE E STEIN, 1981). Desde então, graças ao avanço da tecnologia, com o auxílio da Engenharia de Controle, grande parte destes empecilhos foram superados, proporcionando melhoria no desempenho de diversos processos industriais (DORF, 2011). Isto posto, fica evidente a importância do estudo de sistemas dinâmicos e, em particular, da análise e projeto em espaço de estados como peças fundamentais na formação acadêmica dos discentes de Engenharia Elétrica

Os sistemas dinâmicos em geral, podem ser representados matematicamente através de equações diferenciais contínuas no domínio do tempo. Para cada sistema, há várias formas diferentes de organização das equações que o descrevem. Além disso as resoluções dessas equações são importantes para a análise do desempenho do sistema em função da sua entrada e das condições de operação (OGATA, 1985). O estudo de sistemas por meio de espaço de estados é uma ferramenta importante para compreender de maneira abrangente o desempenho de cada sistema.

Com base nisso, desenvolveu-se um módulo didático capaz de emular plantas de primeira à quarta ordem com até três zeros, permitindo ajuste dos seus parâmetros e aquisição de dados pelo usuário. Outra função do protótipo, é atuar como servossistema para regulação ou rastreamento nas plantas configuradas no módulo, também permitindo o ajuste dos parâmetros e aquisição de dados pelo usuário.

Este projeto objetiva proporcionar aos discentes dos cursos de Engenharia experiência no uso da teoria de espaço de estados aplicada na análise e controle de sistemas dinâmicos, afim de consolidar o conhecimento adquirido nas disciplinas de controle. Ademais, o projeto visa proporcionar uma estratégia didática alternativa às simulações via *softwares* computacionais, afim de aumentar o interesse dos discentes aproximando-os da realidade prática nesta área de conhecimento.

## MATERIAL E MÉTODOS

O desenvolvimento do módulo se inicia com a representação em espaços de estados canônica de controlador, a qual foi obtida por meio de uma equação genérica para uma planta com  $n$  polos e  $m$  zeros. Neste trabalho, o número máximo de polos de um sistema que o módulo poderá emular, foi estipulado como sendo quatro. Esta é uma convenção que permite, no âmbito do ensino, diversas possibilidades de aplicações interessantes.

Como o número de zeros tem de ser sempre menor ou igual ao número de polos para se ter um sistema causal, estabeleceu-se três como sendo o maior número de zeros possível. Portanto, o módulo didático representa, no máximo, um sistema com as características da Equação 1.

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{b_0S^3 + b_1S^2 + b_2S + b_3}{a_0S^4 + a_1S^3 + a_2S^2 + a_3S + a_4} \quad (1)$$

Através desta representação da planta genérica do módulo, em sua máxima configuração, foi criado um diagrama de simulação que lhe é fiel. Desmembrando a fração equivalente da função de transferência e efetuando as transformadas necessárias obtém-se a expressão equivalente no domínio do tempo, como mostram as Equações 2 e 3.

$$\frac{d^4h(t)}{dt^4} = \frac{1}{a_0}u(t) - \frac{a_1}{a_0}\frac{d^3h(t)}{dt^3} - \frac{a_2}{a_0}\frac{d^2h(t)}{dt^2} - \frac{a_3}{a_0}\frac{dh(t)}{dt} - \frac{a_4}{a_0}h(t) \quad (2)$$

$$y(t) = b_0\frac{d^3h(t)}{dt^3} - b_1\frac{d^2h(t)}{dt^2} - b_2\frac{dh(t)}{dt} - b_3h(t) \quad (3)$$

Assim se identificou outras três variáveis de estado,  $x_2$ ,  $x_3$  e  $x_4$ , as quais são, respectivamente,  $\dot{h}(t)$ ,  $\ddot{h}(t)$  e  $\dddot{h}(t)$ , dessa forma as Equações 2 e 3 equivalem, na forma matricial de estados, às Equações 4 e 5 respectivamente.

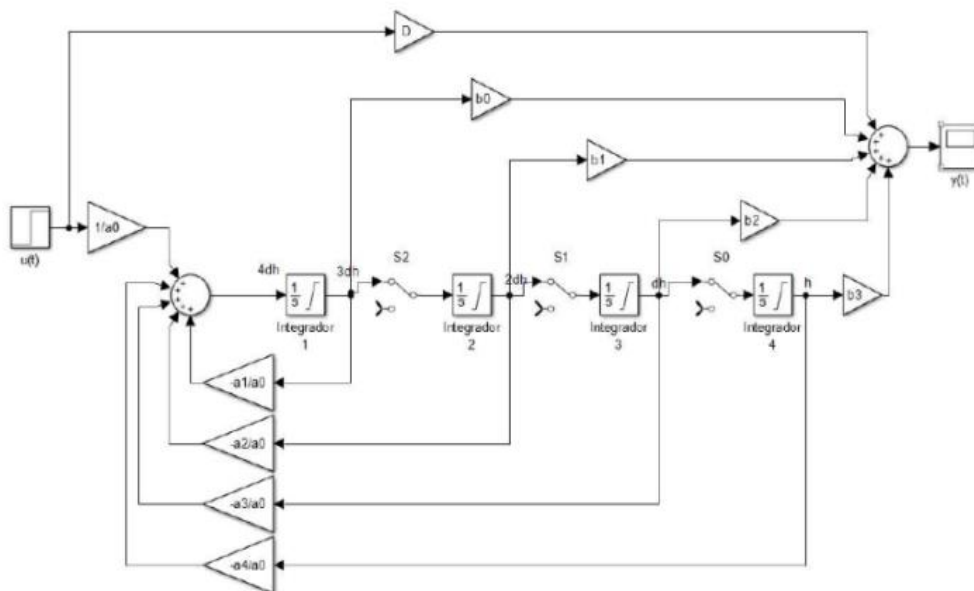
$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \\ \dot{x}_3(t) \\ \dot{x}_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a_4/a_0 & -a_3/a_0 & -a_2/a_0 & -a_1/a_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1/a_0 \end{bmatrix} u(t) \quad (4)$$

$$y(t) = [b_3 \quad b_2 \quad b_1 \quad b_0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} + [D]u(t) \quad (5)$$

Para demonstração da estrutura desejada, criou-se o seu diagrama de simulação correspondente, com o auxílio da interface Simulink (MATLAB, 2016). O diagrama é composto por blocos de ganho (representando os fatores  $a_n$  e  $b_m$ ), blocos de soma e blocos integradores. Ele foi projetado baseado em uma planta de 4ª ordem (implicando numa matriz de estados  $4 \times 4$ ), contudo, o módulo deve permitir ao usuário a redução desta ordem. Cada configuração para um número de polos e zeros inferiores a quatro e três respectivamente, pode ser representada a partir desta. A redução dos zeros implica em zerar elementos da matriz de saída, e para isto, não se necessita de chaveamento, basta apenas zerar o valor dos ganhos  $b_m$ , ligados ao somador de saída.

Entretanto, reduzir o número de polos, portanto a ordem do sistema, não é tão simples, tendo em vista que isto implica na redução das dimensões da matriz de estados, logo, muitas alterações no modelo em espaço de estados devem ser feitas. Também se faz necessário que ao reduzir a ordem da matriz, a quantidade de zeros seja diminuída na mesma proporção, pois, nas aplicações de engenharia o número de polos é superior ao de zeros, e não se deseja possibilitar a situação contrária. Foram utilizados, portanto, uma combinação de chaveamentos que permitam tais alterações na quantidade de polos da planta original. Então, três chaves S0, S1 e S2, foram adicionadas resultando no diagrama na Figura 1.

Figura 1: Diagrama de blocos para simulação do sistema em espaço de estados com chaveamento

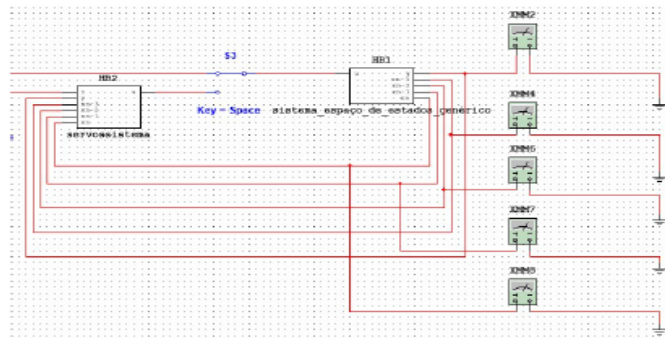


As chaves alteram a ordem da planta representada, ao retirar os integradores que as seguem. Portanto, altera-se a quantidade de ganhos ligados ao somador da entrada, partindo da direita. Este chaveamento retira zeros do circuito na mesma proporção, uma vez que todos os ganhos  $a_n$  e  $b_m$ , subsequentes a cada integrador, também são retirados do circuito.

Para a construção do diagrama de simulação do servossistema, o qual complementa o diagrama do sistema genérico de 4ª ordem foram desenvolvidos dois diagramas, também com a interface Simulink, um para planta do tipo um e outro para planta do tipo zero.

O objetivo da criação do diagrama de simulação é a sua posterior conversão para um circuito eletrônico, baseado em configurações eletrônicas com amplificadores operacionais. E graças à utilização dos circuitos integrador, inversor unitário, subtrator, somador e de ganho constante com amplificador operacional e com o auxílio do *software* NI Multisim, foi possível simular o circuito eletrônico antes de criar sua placa de prototipagem. Para demonstrar a relação entre ambos os circuitos dentro do módulo, de uma maneira visualmente mais simples, utilizou-se a ferramenta *Hierarchical Block* do Multisim. Com ela, transformam-se os dois circuitos principais em “caixas pretas”, onde apenas as suas entradas e saídas podem ser visualizadas, como mostra a Figura 2.

Figura 2: Diagrama completo do modelo no Multisim.



Para o pleno funcionamento do módulo, alguns componentes eletrônicos adicionais tiveram de ser projetados e sintetizados, tais como a fonte simétrica e um circuito para fornecer uma referência degrau ao sistema. O módulo e os componentes supracitados foram elaborados e simulados no *software* NI Multisim.

Para a construção do módulo projetado teoricamente realizou-se a transferência de cada um dos esquemáticos desenvolvidos para o *software* Ultiboard (NATIONAL INSTRUMENTS, 2007), *software* auxiliar e complementar ao NI Multisim, que permite a construção de *layouts* de circuito impresso. Após fazer as adaptações necessárias para a transferência dos três circuitos: planta genérica, realimentação de estados e fonte simétrica, os mesmos foram montados em placa de prototipagem.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Foram realizados dois estudos de caso para averiguar a validade da placa de prototipagem. O primeiro considerou o sistema da Equação 6 cuja resposta em malha aberta é mostrada na Figura 3a. Para este projetou-se um servossistema por realimentação de estados que garantisse o rastreamento de uma entrada de referência degrau unitário de 1 Volt (V), com os polos de malha fechada desejados:  $\lambda_1 = -2 + j4$ ;  $\lambda_2 = -2 - j4$ ;  $\lambda_3 = -10$ . O vetor de realimentação de estados obtido foi  $K = [199 \ 55 \ 8]^t$ .

$$\dot{x}(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -5 & -6 \end{vmatrix} x(t) + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u(t) \quad (6)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t)$$

Como ilustra a Figura 3b, os resultados em regime permanente da saída  $y(t)$  e da variável de estado  $x_1(t)$  chegam a aproximadamente 0.99 V e 0.96 V respectivamente, ou seja, próximos entre si e da referência desejada, enquanto os valores em regime de  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$  ficaram próximos de 0 V. Observou-se que as variáveis  $y(t)$  e  $x_1(t)$  em regime permanente se aproximaram do valor unitário, sendo  $y(t)$  igual a 1,014 V e  $x_1(t)$  igual a 1,01 V.

Para o segundo caso considerou-se o sistema da Equação 7 cuja resposta em malha aberta é mostrada na Figura 4a onde se observa que as variáveis  $x_1(t)$  e  $y(t)$  crescem indefinidamente, enquanto a variável  $x_2(t)$  estabiliza em 0.5 V e  $x_3(t)$  torna-se nula. Para este sistema projetou-se um servossistema por realimentação de estados que garantisse o rastreamento de uma entrada de referência degrau unitário de 1 Volt (V), com os polos de malha fechada desejados:  $\lambda_1 = -2 + j2\sqrt{3}$ ;  $\lambda_2 = -2 - j2\sqrt{3}$ ;  $\lambda_3 = -10$ . O vetor de realimentação de estados obtido foi  $K = [160 \ 54 \ 11]^t$ .

$$\dot{x}(t) = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix} x(t) + \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1 \ 0 \ 0]x(t)$$

Como ilustra a Figura 4b, os resultados em regime da variável  $x_1(t)$  estabiliza-se no valor unitário, demonstrando o sucesso do servo sistema no rastreamento referência, a saída  $y(t)$  apresenta o valor de 1.01 V, sendo considerada igual a  $x_1(t)$  e os valores de  $x_2(t)$  e  $x_3(t)$  são considerados nulos uma vez que se estabilizam em zero.

A partir dos resultados obtidos com a placa de prototipagem, pode-se afirmar que os valores reais encontrados estão muito próximos aos valores teóricos previstos no Multisim, possuindo uma pequena diferença, porém não sendo considerado como erro, uma vez que os componentes reais utilizados apresentam imperfeições, diferente dos valores teóricos do Multisim.

Figura 3. Gráficos do primeiro estudo de caso. (a) Sem servossistema. (b) Com servossistema.

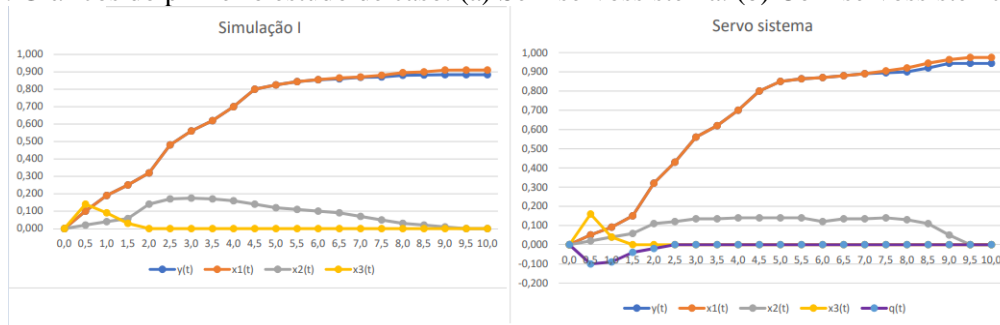
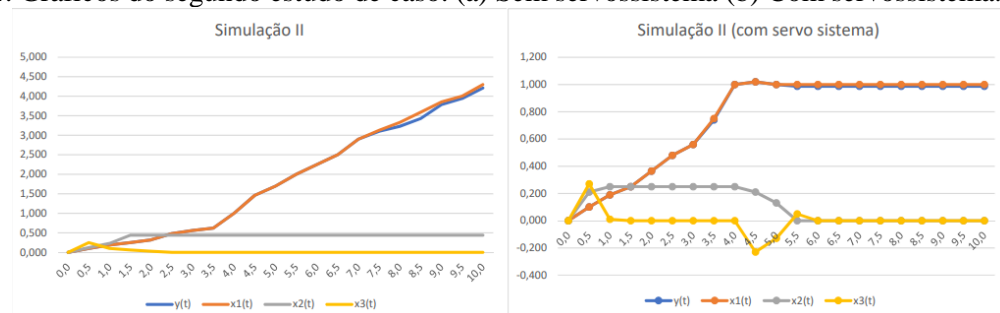


Figura 4. Gráficos do segundo estudo de caso. (a) Sem servossistema (b) Com servossistema.



## CONCLUSÃO

Após as simulações e testes, pôde-se observar que, apesar de suas limitações, o módulo é capaz de emular uma ampla gama de configurações diferentes de sistemas. O sistema composto majoritariamente de amplificadores operacionais proporciona familiaridade ao usuário. Além disso, o acompanhamento das variáveis de estado pelo usuário é realizado de maneira clara e direta, sem a necessidade de cálculos auxiliares ou conversões. Apesar dos leves atrasos apresentados nas simulações, graças a presença de circuitos integrados, a experiência do usuário com o módulo não é comprometida.

A autonomia do módulo é garantida pela presença da fonte simétrica e do circuito gerador de referência degrau, portanto extingue-se a necessidade do uso de um microcontrolador para a operação do dispositivo. A construção do módulo através da montagem dos circuitos desenvolvidos em placas de circuito impresso, a criação de roteiros laboratoriais para utilização do módulo como estratégia didática nas disciplinas na área de controle e a substituição das chaves e potenciômetros manuais para o chaveamento e ajuste de ganho, são algumas das proposições de trabalhos futuros.

## REFERÊNCIAS

- Dorf, Richard C.; BISHOP, Robert H. Modern control systems. 12 ed. Upper Saddle River, New Jersey: Prentice Hall, 2011.
- Doyle e Stein ; Doyle J. and Stein, G. (1981). Multivariable feedback designs: Concepts for a classical/modern synthesis. IEEE Transactions on Automatic Control, AC-26:4 –16.
- Guerrero-Castro, Félix E; BÁEZ-LOPEZ, David. Circuit Analysis with Multisim. Puebla: Morgan Claypool, 2011
- MATLAB and Statistics Toolbox Release 2016a, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, US.
- Ogata, Katsuhiko. Engenharia de Controle Moderno. Rio de Janeiro: Prentice Hall do Brasil, 1985.