

MAPEAMENTO DE CAMPO ELÉTRICO EM EQUIPAMENTOS ELÉTRICOS A PARTIR DA SOLUÇÃO NUMÉRICA DA EQUAÇÃO DE POISSON

GABRIEL DA SILVA BELÉM^{1*}; MARIA EDUARDA DE OLIVEIRA SALES²; GERONIMO BARBOSA ALEXANDRE³

¹ Discente de Engenharia Elétrica, IFPE, Garanhuns - PE, gabrielsbgr@gmail.com;

² Discente de Engenharia Elétrica, Bolsista FACEPE, IFPE, Garanhuns-PE, duda.oli.sales@gmail.com;

³ M.Sc. Engenharia Elétrica, Professor EBTT, IFPE, Garanhuns - PE, geronimo.alexandre@garanhuns.ifpe.edu.br

Apresentado no
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2018
21 a 24 de agosto de 2018 – Maceió - AL, Brasil.

RESUMO: O mapeamento de campo elétrico em eletrônicos e equipamentos de subestações é ainda um desafio, tendo em vista uma instrumentação deficiente para quantificar a intensidade de campo, logo se faz necessário o uso de modelos de estimação de campo. Estes modelos são descritos por equações diferenciais complexas, que exigem solução numérica. Diante deste cenário, o objetivo deste trabalho é apresentar a metodologia utilizada para o mapeamento de campo a partir da solução de Poisson. O procedimento utilizado é descrito pelos seguintes passos: (A) escolha do equipamento a ser estudado; (B) determinar as condições de contorno; (C) resolver numericamente a equação de Poisson e (D) apresentar as curvas de campo elétrico. O procedimento proposto foi avaliado a um capacitor de placas paralelas. Os resultados de simulação foram satisfatórios, tanto no tocante da distribuição das linhas equipotenciais, como no sentido do fluxo de campo elétrico. A solução proposta pode ser aplicada em outros equipamentos desde que estejam bem definidas as condições de contorno.

PALAVRAS-CHAVE: Equação de Poisson, linhas de Fluxo e equipotenciais.

FIELD MAPPING ON ELECTRICAL EQUIPMENTS ELECTRIC FROM THE SOLUTION NUMERIC OF POISSON EQUATION

ABSTRACT: The mapping of the electric field in electronics and substation equipment is still a challenge, considering poor instrumentation to quantify the field strength, so it is necessary to use field estimation models. These models are described by complex differential equations, which require numerical solution. In view of this scenario, the objective of this work is to present the methodology used for the field mapping from the Poisson solution. The procedure used is described by the following steps: (A) choice of equipment to be studied; (B) determining the boundary conditions; (C) solve numerically the Poisson equation and (D) presenting the electric field curves. The proposed procedure was evaluated to a parallel plate capacitor. The simulation results were satisfactory, both regarding the distribution of the equipotential lines, and in the direction of the electric field flow. The proposed solution can be applied in other equipment's as long as the boundary conditions are well defined.

KEYWORDS: Poisson equation, flow of lines and equipotential.

INTRODUÇÃO

Uma linha de fluxo elétrico é uma trajetória ou uma linha imaginária desenhada de tal modo que sua orientação em qualquer ponto é a orientação do campo elétrico nesse ponto. Em outras palavras, são as linhas para os quais o vetor densidade de fluxo elétrico, D , é tangencial em cada ponto. (Sadiku, 2005, p. 143). Qualquer superfície na qual o potencial elétrico é o mesmo em toda a sua extensão é conhecida como uma superfície equipotencial. (Alexander & Sadiku, 2008, p. 144).

Quando as condições são tais que o potencial V é o mesmo em todos os planos paralelos ao plano- xy , então, em regiões livres de cargas, V é uma função harmônica das duas variáveis x e y . A

intensidade de campo elétrico é representada por um vetor que é oposto ao gradiente de V . Uma superfície sobre a qual V é uma constante é uma superfície equipotencial. A força tangente a um superfície condutora é zero no caso estático, pois as cargas se movem livremente sobre tal superfície de um condutor e essa superfície é equipotencial (Collin, 1985; Collin, 1979; Johnson, 1980).

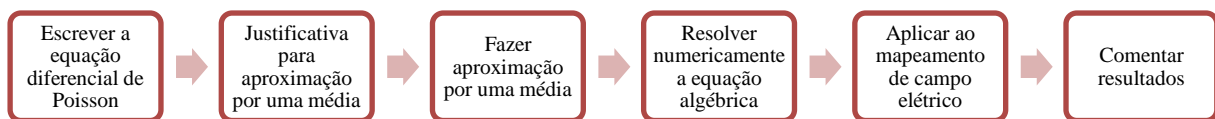
Nos problemas do dia-a-dia é dada uma região e nos é pedido à distribuição de potencial elétrico, a partir desta distribuição pode-se determinar a distribuição de campo elétrico, apenas tirando o gradiente da função potencial. Para resolver tal situação é necessário recorrer a métodos numéricos. Pode ser citado como uma aplicação típica de mapeamento de campo (linhas de fluxo e superfícies equipotenciais) é encontrada no diagnóstico de doenças cardíacas. O coração humano bate em resposta a uma diferença de potencial de campo elétrico interna. O coração pode ser caracterizado como um dipolo com um mapa de campo bem característico. Tal mapa de campo é útil para detectar posição anormal do coração.

O presente artigo objetiva propor e validar uma metodologia para mapeamento de campos elétricos em equipamentos elétricos a partir da solução numérica da equação de Laplace / Poisson em coordenadas cartesianas, utilizando para isto *software* livre Scilab 6.0.1 versão para 64 bits. Tal metodologia é avaliada em um capacitor de placas paralelas.

MATERIAIS E MÉTODOS

A metodologia utilizada para consecução dos objetivos estabelecidos consiste na execução dos passos descritos no fluxograma da Figura 1.

Figura 1 – Fluxograma utilizado para simulação do mapeamento de campo elétrico.



A equação de Poisson em coordenadas cartesianas é dada por:

$$\nabla * (\epsilon \nabla V) = \rho \quad (1)$$

Que pode ser reescrita como:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2)$$

Onde: V é a função potencial elétrico, ρ é a densidade superficial de cargas e ϵ é permissividade elétrica do material (constante), quando não existe densidade de carga ($\rho = 0$), a equação de Poisson passa ser a equação de Laplace. Para obter a solução da equação de Poisson, usando métodos numéricos é necessário fazer a seguinte aproximação:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} \approx \frac{V^{x+\Delta x, y, z} - 2 * V^{x, y, z} + V^{x-\Delta x, y, z}}{\Delta x^2} + \frac{V^{x, y+\Delta y, z} - 2 * V^{x, y, z} + V^{x, y-\Delta y, z}}{\Delta y^2} + \frac{V^{x, y, z+\Delta z} - 2 * V^{x, y, z} + V^{x, y, z-\Delta z}}{\Delta z^2} \quad (3)$$

Observe que $V(x; y; z)$ é uma função de várias variáveis no caso, três, x, y e z , para dimensões pequenas $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$, portanto:

$$V = \frac{V^{x+\Delta x, y, z} + V^{x-\Delta x, y, z} + V^{x, y+\Delta y, z} + V^{x, y-\Delta y, z} + V^{x, y, z+\Delta z} + V^{x, y, z-\Delta z}}{6} - \frac{\rho^{x, y, z} * \Delta^2}{\epsilon} \quad (4)$$

Percebe-se a partir de (4) que a função potencial passa a ser uma média, e com ajuda de um software numérico pode-se visualizar as linhas de potencial elétrico, e com algumas manobras as linhas de fluxo elétrico e outras variáveis elétricas de interesse. Para geometria simples e simétrica é possível resolver a equação (1), analiticamente pelo método de separação de variáveis, mas em situações reais a geometria encontrada não é simples nem tão pouco simétrica, sendo necessário recorrer a técnicas numéricas, sendo assim o objetivo é resolver de forma simples e rápida a equação (1), e explorar algumas situações práticas onde se faz necessário o mapeamento de campos elétricos, como maneira de validar o método apresentado.

O desenvolvimento matemático implementado pelo *software* especialista consiste na solução das equações apresentadas a seguir, usando o método das diferenças finitas.

Da definição de derivada de $V(x, y)$ em um ponto (x_0, y_0) :

$$V' = \frac{\partial V}{\partial x}(x = x_0) \approx \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - V(x_0 - \Delta x, y_0)}{2\Delta x} = \frac{V_{i+1,j} - V_{i-1,j}}{2\Delta x} \quad (5)$$

Onde Δx é um incremento suficientemente pequeno ao longo de x . Para a derivada segunda, que é a derivada da derivada primeira, V' , temos:

$$V'' = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}(x = x_0) = \frac{\partial V'}{\partial x} \approx \frac{V'(x_0 + \Delta x/2, y_0) - V'(x_0 - \Delta x/2, y_0)}{\Delta x} = \frac{V(x_0 + \Delta x, y_0) - 2V(x_0, y_0) + V(x_0 - \Delta x, y_0)}{(\Delta x)^2} = \frac{V_{i+1,j} - 2V_{i,j} + V_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} \quad (6)$$

As equações (5) e (6) são aproximações por diferenças finitas para as derivadas parciais, primeira e segunda, de V em relação à x em $x = x_0$, de forma análoga, obtemos as aproximações para as derivadas parciais de V em relação à y e a z . Fazendo $\Delta x = \Delta y = \Delta z = h$, pode-se escrever a expressão (2), como:

$$V_{i,j,k} = \frac{V_{i+1,j,k} + V_{i-1,j,k} + V_{i,j+1,k} + V_{i,j-1,k} + V_{i,j,k+1} + V_{i,j,k-1} + h^2 \rho / \epsilon}{6} \quad (7)$$

A equação (7) é aproximação por diferenças finitas da equação de Poisson a nove nós para o potencial central à malha quadrada. Esta expressão pode ser interpretada como uma forma diferencial de estabelecer o fato de que o potencial em um ponto específico é a média dos potenciais vizinhos.

Para aplicar a expressão (7) a um dado problema é necessário calcular o potencial em cada ponto, de forma iterativa, da seguinte maneira: iniciamos como os potenciais extremos nulos e os centrais iguais a um, aplica-se a expressão (7) a cada ponto, ao término os potenciais encontrados não são precisos, mas sim aproximados, para aumentar a precisão dos valores dos potenciais, repete-se o cálculo para cada nó livre utilizando os valores anteriores até que o critério de convergência seja alcançado. Quando ρ for zero a equação de Poisson torna-se a equação de Laplace, para o qual aplicaremos a configuração de um capacitor de placas paralelas. A solução numérica da equação de Laplace foi feita utilizando o *software* matemático Scilab.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

Nesta seção será aplicada a metodologia proposta a um dispositivo físico, real, utilizado amplamente na forma de circuitos integrados e embargados, o capacitor, sendo utilizado um capacitor de placas paralelas, podendo ser aplicado a outro dispositivo eletroeletrônico, bem como dispositivos gerais de medição. Resolvendo a equação (2), pelo método das diferenças finitas para o elemento de circuito (ver Figura 2), em seguida é obtida a função de campo elétrico (linhas de campo), conforme expressão (6),

$$E(x, y, z) = -\nabla V = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) \quad (6)$$

O capacitor pode ser definido como uma malha quadrada de nove pontos, no qual o nó central foi atribuído 220 Volts e os nós extremos zero volts e o critério de convergência foi de 0.001, ($V_{novo} - V_{antigo} > 0.001$), ao fim obtivemos um vetor de potenciais, no qual utilizando a função gráfica *contour* do MatLab, obtém-se as linhas de potencial elétrico do componente eletrônico ilustradas nas Figuras 2 e 3. Para obter as linhas de campo elétrico é necessário fazer a operação gradiente da distribuição de potencial elétrico, com auxílio da função *gradient* (função que realiza a operação gradiente) e da função *quiver* (função para plotar campos vetoriais), ambas do ambiente Scilab, gerou-se o gráfico da Figura 5 .

Para o estudo de caso apresentado o método mostrou-se eficiente, condizendo com a física do problema, onde as linhas equipotenciais sofrem o efeito de borda, e que estas são perpendiculares às linhas de fluxo.

Figura 2 – Representação do Capacitor de placas paralelas no simulador.

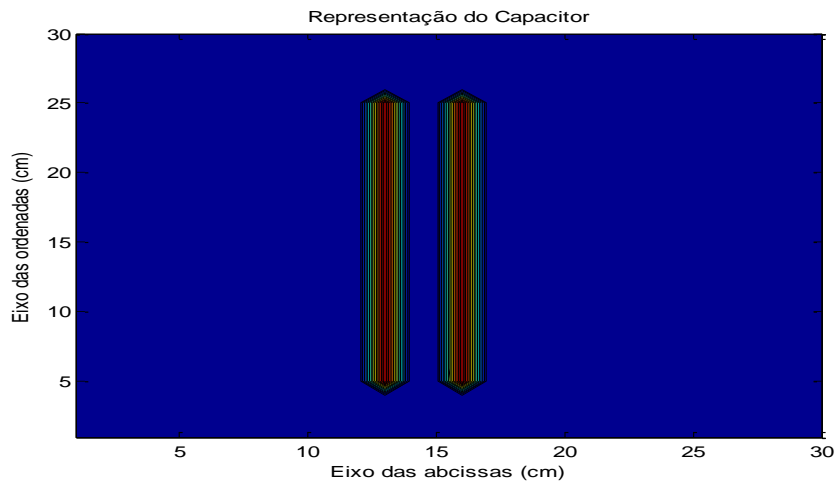


Figura 3 – Família de curvas de potenciais (superfícies equipotenciais).

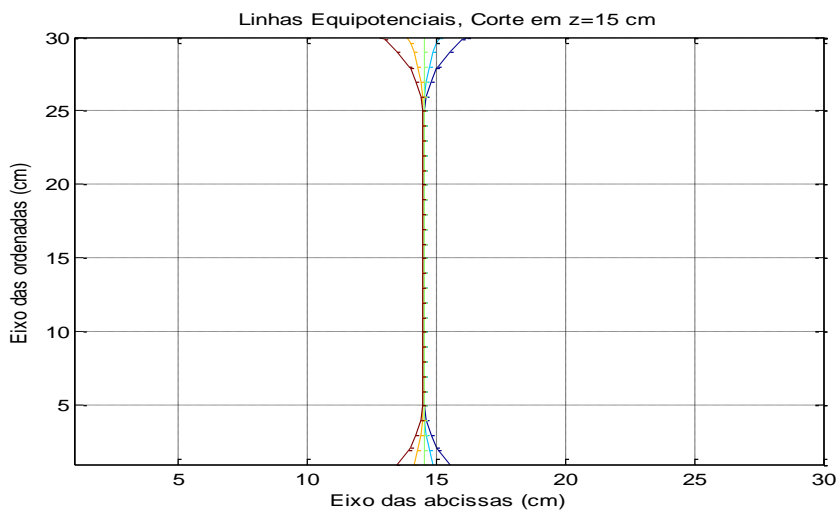


Figura 4 – Linhas de potenciais vistas em termos da espessura da placa.

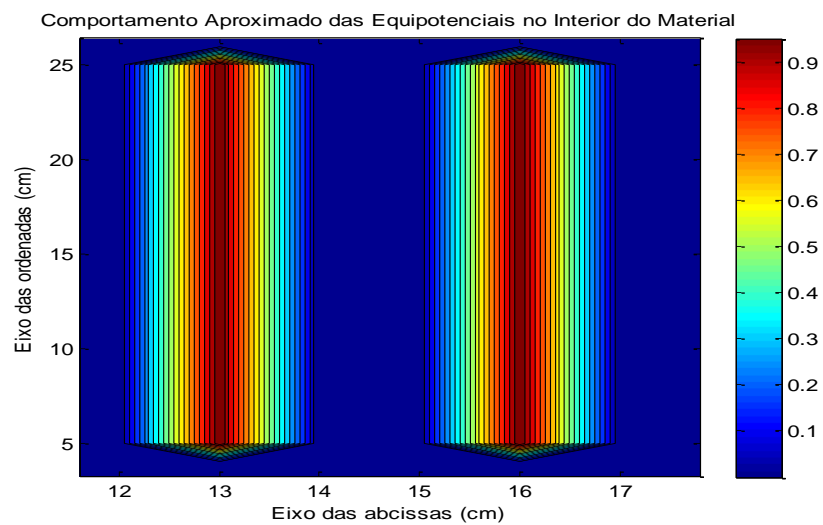
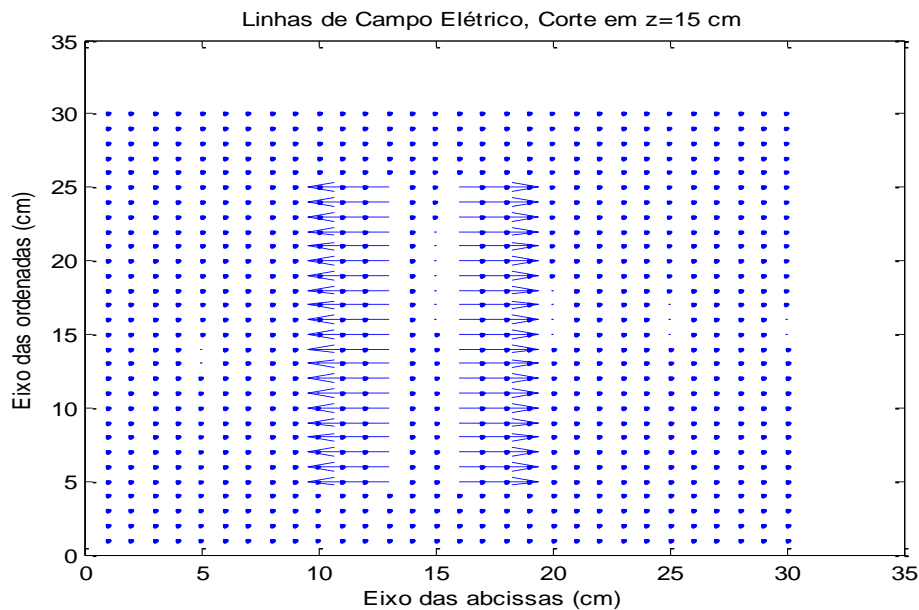


Figura 5 – Distribuição de campo elétrico (linhas de fluxo).



Todos os dispositivos elétricos funcionam baseados na ação de campos elétricos, produzidos por cargas elétricas, e campos magnéticos, produzidos por correntes elétricas. Por sua vez, correntes elétricas se constituem de cargas elétricas em movimento. Para entender o funcionamento de dispositivos elétricos, devemos ser aptos para avaliar estes campos nestes dispositivos, e em torno deles. Isso é possível se dominarmos técnicas que nos permitam uma visualização espacial dos fenômenos. Em outras palavras, devemos ser capazes de produzir mapas de campos que descrevam o comportamento dos fenômenos elétricos. Estes mapas normalmente representam linhas de fluxo, superfícies equipotenciais e distribuições de densidades. Estes mapas nos dão informações a respeito de intensidade de campo, diferença de potencial, energia armazenada, cargas, densidades de correntes, entre outras variáveis.

CONCLUSÃO

No presente estudo determinamos de forma rápida e eficiente a distribuição de campo elétrico de uma configuração simples (capacitor de placas paralelas), a partir do modelo de Laplace. Para uma geometria simples e simétrica é possível resolver a equação (1), analiticamente pelo método de separação de variáveis, mas em situações reais a geometria encontrada não é simples nem tão pouco simétrica, sendo necessário recorrer a técnicas numéricas. Tendo em mãos as variáveis: vetor campo elétrico e vetor potencial elétrico, pode-se obter outras variáveis, tais como: energia, potência e densidade de corrente, necessárias para caracterizar o instrumento. Estudar e compreender mapas de campo são de fundamental importância para o projeto e desenvolvimento de novos equipamentos eficientes, reduzindo possíveis riscos/danos à saúde humana.

AGRADECIMENTOS

O presente trabalho foi realizado com apoio do Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia de Pernambuco (IFPE – *Campus* Garanhuns).

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Alexander, C. K; Sadiku, M. N. O. Fundamentos de circuitos elétricos, McGraw-Hill, 5ª Edição, Porto Alegre, 2013.
- Collin, R. E. Antennas and Radiowave Propagation. International Student Edition, Singapore: McGraw-Hill, 1985, ISBN 0-07-011808-6.
- Collin, R.E., Foundations for Microwave Engineering, 2nd Edition, Wiley-IEEE Press, 2000, 994p.
- Johnson, W. C., Transmission Lines and Network. Tokyo: Mc Graw Hill Kogaknsha, 1950.
- Sadiku, M.N. O. Elements of Electromagnetics, 2nd. Edition, Saunders College Publishing, 1989, 821p.