

## **ANÁLISE CINEMÁTICA E DINÂMICA DE UM MECANISMO DE QUATRO BARRAS ACELERADO UTILIZANDO RECURSOS COMPUTACIONAIS**

EMERSON FEITOSA DE ARAÚJO<sup>1</sup>; HITALO CASTRO E SILVA<sup>2</sup>;  
MATHEUS GABRIEL ALMEIDA<sup>3</sup>; NATÁLIA LIMA FERNANDES<sup>4\*</sup>; THAÍS SPÍNDOLA GARCÊZ<sup>5</sup>

<sup>1</sup>Acadêmico de Engenharia Mecânica, IFPI, Teresina-PI, emersonfaraujo@yahoo.com.br;

<sup>2</sup>Acadêmico de Engenharia Mecânica, IFPI, Teresina-PI, hitalo48@gmail.com;

<sup>3</sup>Acadêmico de Engenharia Mecânica, IFPI, Teresina-PI, almeidam091@gmail.com;

<sup>4</sup>Acadêmico de Engenharia Mecânica, IFPI, Teresina-PI, natalialf123@gmail.com;

<sup>5</sup>Acadêmico de Engenharia Mecânica, IFPI, Teresina-PI, thaais.spindola@hotmail.com;

Apresentado no  
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2018  
21 a 24 de agosto de 2018 – Maceió-AL, Brasil

**RESUMO:** O mecanismo de quatro barras tem sido utilizado como objeto de estudo relacionado a análises cinemáticas e dinâmicas. O objetivo desse trabalho é analisar as reações cinemáticas e dinâmicas de um mecanismo de 4 barras utilizando recursos computacionais, como MATLAB e SOLIDWORKS. A análise dinâmica é realizada por meio de um sistema linear matricial quadrática 9x9 para cálculo das raízes levando em conta cada posição alcançada pelo mecanismo. O artifício utilizado para encontrar a solução é realizar de forma repetitiva considerando um ciclo completo do mecanismo, de 0 a 360 graus. A análise dinâmica pode ser feita por diversos métodos, mas a utilizada na análise desse mecanismo requereu apenas a aplicação das Leis de Newton, já que essa fornece mais informações sobre as forças internas do mecanismo. A análise dos resultados permitiu avaliar os esforços cíclicos que atuam nas juntas e o torque necessário para obtenção dos momentos angular e linear.

**PALAVRAS-CHAVE:** Quatro barras, Análise cinemática, Análise dinâmica, Mecanismo, MATLAB

### **CINEMATIC AND DYNAMIC ANALYSIS OF A FOUR-BAR ACCELERATED MECHANISM USING COMPUTATIONAL RESOURCES**

**ABSTRACT:** The four-bar mechanism has been used as object of study related to kinematic and dynamic analysis. The objective of this article is to analyze the kinematic and dynamic reactions of a 4-bar mechanism using computational resources such as MATLAB and SOLIDWORKS. A dynamic analysis is performed by means of a 9x9 quadratic linear matrix system to calculate the roots taking into account each position reached by the mechanism. The artifice used to find the solution is to perform repetitively considering a complete cycle of the mechanism, from 0 to 360 degrees. Dynamic analysis can be done by several methods, but the one used in the analysis of this mechanism required only the application of Newton's Laws since it provides more information about the internal forces of the mechanism. The analysis of the results allowed to evaluate the cyclic forces acting on the joints and the torque required to obtain angular and linear moments.

**KEYWORDS:** Four Bars, Kinematic Analysis, Dynamic Analysis, Mechanism, MATLAB

### **INTRODUÇÃO**

Uma definição útil de mecanismo é um sistema de elementos unidos e organizados para transmitir movimento de uma maneira predeterminada. Um dos sistemas articulados mais importantes encontrados em dispositivos mecânicos certamente é o mecanismo de 4 barras. O mecanismo de quatro barras encontra inúmeras aplicações no âmbito da mecânica, como por exemplo, em mecanismos de acionamento de prensas, ou de sistemas de projeção de filmes, mecanismos de retorno rápido, entre outros.

A análise dinâmica é realizada por meio de um sistema linear matricial quadrática 9x9 para cálculo das raízes levando em conta cada posição alcançada pelo mecanismo. O artifício utilizado para encontrar a solução é realizar de forma repetitiva considerando um ciclo completo do mecanismo, de 0 a 360 graus. O objetivo desse trabalho é analisar as reações cinemáticas e dinâmicas de um mecanismo de 4 barras utilizando recursos computacionais, como MATLAB e SOLIDWORKS.

## MATERIAL E MÉTODOS

A análise cinemática foi realizada assumindo que as barras sejam caracterizadas como corpos rígidos e ideais, além de ignorar as folgas existentes nas uniões fixadas por pinos e o atrito entre as partes moveis. O estudo cinemático e dinâmico neste trabalho foi feito de acordo com Norton (2010) a partir dos resultados obtido por meio de cálculo de raízes de um sistema linear do tipo  $A X = C$  ( $X$  é a matriz coluna com as reações presentes no mecanismo) em cada posição.

O estudo do mecanismo seguiu a seguinte ordem cronológica de resolução: primeiro foi dado as condições iniciais de trabalho da manivela além dos comprimentos e massas de cada elo como mostrado nas Tabelas 1 e 2 para em seguida calcular os pesos e segundo momento de inercia destes.

Tabela 1. Condições iniciais. Fonte: Autoria Própria

Condições Iniciais de Trabalho	
Velocidade angular	1 rad/s
Aceleração angular	1 rad/s <sup>2</sup>
Ângulo inicial ( $\theta_2$ )	0 rad

Tabela 2. Características dos elos. Fonte: Autoria Própria

	Comprimento	Massa
Elo 1	60 cm	30 kg
Elo 2	25 cm	12.5 kg
Elo 3	50 cm	25 kg
Elo 4	50 cm	25 kg

A análise da cinemática baseada em Norton (2010) apresenta uma solução analítica com equações do segundo grau e notação em números complexos, o que possibilita a análise em várias posições e com boa precisão matemática.

O método tem início na Equação (1) dos vetores posição verificando se os tamanhos dos elos atendem a condição de Grashof – classe 1.

$$R_2 + R_3 - R_4 - R_1 = 0 \quad (1)$$

O ângulo de entrada  $\theta_2$  proposto varia de acordo com a função horária da velocidade angular abaixo:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \quad (2)$$

Para a determinação da posição das juntas e do centro de gravidade de cada elo em cada posição foi utilizado modelo algébrico proposto por Norton (2010):

$$A_x = a \cos \theta_2 \quad A_y = a \sin \theta_2 \quad (3)$$

Como pode-se observar as componentes  $O_{2x}$ ,  $O_{2y}$  e  $O_{4y}$  são iguais a zero e o valor de  $O_{4x}$  depende o comprimento do elo fixo.

As coordenadas do ponto b são obtidas usando as equações (4) dos círculos sobre A e  $O_4$ :

$$b^2 = (B_x - A_x)^2 + (B_y - A_y)^2 \quad c^2 = (B_x - d)^2 + B_y^2 \quad (4)$$

Que fornecem um par de equações simultâneas (5) em  $B_x$  e  $B_y$  que são apresentadas abaixo:

$$B_x = S - \frac{2A_y B_y}{2(A_x - B)} \quad B_y^2 + \left( S - \frac{A_y B_y}{A_x - d} - d \right)^2 - c^2 = 0 \quad (5)$$

Foi encontrada uma equação inicial  $B_y$  quadrática com duas soluções, que foi resolvida com uma expressão familiar para as raízes da Equação (6):

$$B_y = \frac{-Q \pm \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P} \quad (6)$$

Em que, segundo Norton (2010):

$$P = \frac{A_y^2}{(A_x - d)^2} + 1 \quad R = (d - S)^2 - c^2 \quad Q = \frac{2A_y(d - S)}{A_x - d} \quad S = \frac{a^2 - b^2 + c^2 - d^2}{2(A_x - d)} \quad (7)$$

Dessa forma podemos encontrar os ângulos  $\theta_3$  e  $\theta_4$  utilizando as Equações (8) e (9):

$$\theta_3 = \tan^{-1} \left( \frac{B_y - A_y}{B_x - A_x} \right) \quad (8) \quad \theta_4 = \tan^{-1} \left( \frac{B_y}{B_x - d} \right) \quad (9)$$

Segundo Norton (2010) para a análise algébrica do mecanismo os ângulos  $\theta_3$  e  $\theta_4$  devem ser calculados a partir do primeiro quadrante. Para este fim foi utilizado nesta metodologia a estrutura

condicional *if/else* para reposicionar o ângulo para o quadrante já mencionado, em caso de ângulos negativos.

Uma vez encontrados os ângulos de todos os elos, a determinação e o cálculo da posição de qualquer ponto, em qualquer elo, para qualquer posição de entrada do mecanismo, são simples e diretos.

Figura 1. Mecanismo de 4 Barras e seus Centros de Gravidade Fonte: Autoria Própria

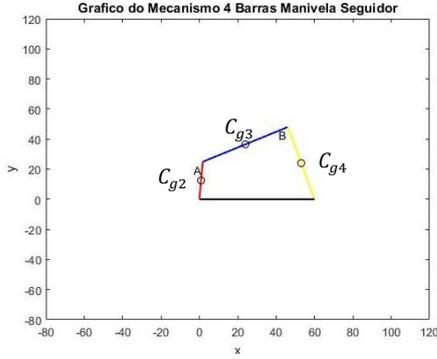
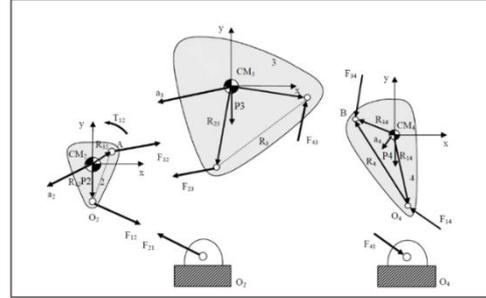


Figura 2. Diagrama de corpo livre genérico [Adaptado de Rezende et al, 2010].



Para achar a posição do centro de gravidade do elo motor **R2**, sendo um elo uniforme, foi utilizado a seguinte equação adaptada de Norton (2010):

$$R_{Cg2} = \frac{a}{2} e^{j(\theta_2)} = \frac{a}{2} [\cos(\theta_2) + j\text{sen}(\theta_2)] \quad (10)$$

A posição do centro de gravidade do elo **R4** é encontrada analogamente, fazendo:

$$R_{Cg4} = \frac{c}{2} e^{j(\theta_4)} = \frac{c}{2} [\cos(\theta_4) + j\text{sen}(\theta_4)] \quad (11)$$

A posição do centro de gravidade do elo **R3** foi encontrada por meio da soma da posição da junta A e da posição relativa de  $C_{g3}$  em relação a junta A. A posição da junta A já foi previamente definida e a posição relativa de  $C_{g3}$  em relação ao ponto A é dada pela Equação (12), assim temos:

$$R_{Cg3A} = \frac{b}{2} e^{j(\theta_3)} = \frac{b}{2} [\cos(\theta_3) + j\text{sen}(\theta_3)] \quad (12)$$

$$R_{Cg3} = R_A + R_{Cg3A} \quad (13)$$

Terminada a análise de posições, o próximo passo é determinar as velocidades de todos os elos e pontos de interesse no mecanismo.

Para a determinação da posição angular do elo motor e de sua respectiva velocidade angular em função do tempo foi utilizado a função horária da posição angular, apresentada na equação (2), e a função horária da velocidade angular (14).

$$\omega = \omega_o + at \quad (14)$$

As equações para determinação de  $\omega_3$  e  $\omega_4$  foram sugeridas por Norton (2010), sendo estas:

$$\omega_3 = \frac{a\omega_2 \text{sen}(\theta_4 - \theta_2)}{b \text{sen}(\theta_3 - \theta_4)} \quad (15) \quad \omega_4 = \frac{a\omega_2 \text{sen}(\theta_2 - \theta_3)}{c \text{sen}(\theta_4 - \theta_3)} \quad (16)$$

Uma vez encontrados  $\omega_3$  e  $\omega_4$  podemos então encontrar as velocidades lineares de  $V_a$  e  $V_b$  através das Equações (17) e (18):

$$V_A = j a \omega_2 [\cos(\theta_2) + j\text{sen}(\theta_2)] = a \omega_2 [-\text{sen}(\theta_2) + j\cos(\theta_2)] \quad (17)$$

$$V_B = j c \omega_4 [\cos(\theta_4) + j\text{sen}(\theta_4)] = c \omega_4 [-\text{sen}(\theta_4) + j\cos(\theta_4)] \quad (18)$$

Uma vez que a análise de velocidade tenha sido feita o próximo passo é determinar a aceleração de todos os pontos de interesse do mecanismo ou máquina.

Utilizando as seguintes equações de apoio (19) demonstradas por Norton (2010) podemos calcular as acelerações angulares  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ :

$$\begin{aligned} A &= c \text{sen}(\theta_4) & B &= b \text{sen}(\theta_3) \\ C &= a \alpha_2 \text{sen}(\theta_2) + a \omega_2^2 \cos(\theta_2) + b \omega_3^2 \cos(\theta_3) - c \omega_4^2 \cos(\theta_4) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} D &= d \cos(\theta_4) & E &= b \cos(\theta_3) \\ F &= a \alpha_2 \cos(\theta_2) - a \omega_2^2 \text{sen}(\theta_2) - b \omega_3^2 \text{sen}(\theta_3) + c \omega_4^2 \text{sen}(\theta_4) \end{aligned}$$

Obtendo esses resultados, temos:

$$\alpha_3 = \frac{CD - AF}{AE - BD} \quad (20) \quad \alpha_4 = \frac{CE - BF}{AE - BD} \quad (21)$$

Logo após calcular  $\alpha_3$  e  $\alpha_4$ , podemos calcular as acelerações lineares substituindo a identidade de Euler:

$$A_A = a \alpha_2 (-\text{sen}(\theta_2) + j\cos(\theta_2)) - a \omega_2^2 (\cos(\theta_2) + j\text{sen}(\theta_2)) \quad (22)$$

$$A_B = c \alpha_4 (-\text{sen}(\theta_4) + j\cos(\theta_4)) - c \omega_4^2 (\cos(\theta_4) + j\text{sen}(\theta_4)) \quad (23)$$

Após encontradas as acelerações angulares de todos os elos, é possível calcular a aceleração em qualquer ponto de qualquer elo do mecanismo. Então calculamos as acelerações nos centros de gravidade de cada elo.

Para calcular a aceleração no centro de gravidade do elo motor **R2**, utilizamos a equação adaptada de Norton (2010):

$$A_{Cg2} = \frac{a}{2}\alpha_2 (-\sin(\theta_2) + j\cos(\theta_2)) - \frac{a}{2}\omega_2^2(\cos(\theta_2) + j\sin(\theta_2)) \quad (24)$$

E analogamente, calculamos a aceleração no centro de gravidade do elo **R4**:

$$A_{Cg4} = \frac{c}{2}\alpha_4 (-\sin(\theta_4) + j\cos(\theta_4)) - \frac{c}{2}\omega_4^2(\cos(\theta_4) + j\sin(\theta_4)) \quad (25)$$

Para o cálculo da aceleração do centro de gravidade do elo **R3**, somamos a aceleração na junta A e a aceleração relativa do ponto  $C_{g3}$  em relação a junta A:

$$A_{Cg3A} = \frac{b}{2}\alpha_3 (-\sin(\theta_3) + j\cos(\theta_3)) - \frac{b}{2}\omega_3^2(\cos(\theta_3) + j\sin(\theta_3)) \quad (26)$$

$$A_{Cg3} = A_A + A_{Cg3A} \quad (27)$$

Para a análise dinâmica do mecanismo foi utilizado o método de solução newtoniana que consiste nos somatórios de todas as forças e torques presentes no sistema, representadas pelas Equações (28), (29), (30):

$$\sum F_x = ma_x \quad (28) \quad \sum F_y = ma_y \quad (29) \quad \sum T = I_{cm}\alpha \quad (30)$$

Para a formulação do sistema para este mecanismo são necessárias as massas de cada elo, a localização de seu CG e o momento de massa ( $I_G$ ) em relação ao CG. A partir da localização do CG foi definido os vetores entre as juntas e estes como mostrado na Figura (2).

Para o elo 2 temos:

$$F_{12x} + F_{32x} = m_2 a_{G2x} \quad (31) \quad F_{12y} + F_{32y} - P_2 = m_2 a_{G2y} \quad (32)$$

$$T_{12} + (R_{12x}F_{12y} - R_{12y}F_{12x}) + (R_{32x}F_{32y} - R_{32y}F_{32x}) = I_{G2}\alpha_2 \quad (33)$$

Para o elo 3, com substituição da força de reação  $F_{23}$  pela  $-F_{32}$  temos:

$$F_{43x} - F_{32x} = m_3 a_{G3x} \quad (34) \quad F_{43y} - F_{32y} - P_3 = m_3 a_{G3y} \quad (35)$$

$$(R_{43x}F_{43y} - R_{43y}F_{43x}) - (R_{23x}F_{32y} - R_{23y}F_{32x}) = I_{G3}\alpha_3 \quad (36)$$

Para o elo 4, substituindo a força de reação  $F_{34}$  pela  $-F_{43}$  temos o sistema de equação:

$$F_{14x} - F_{43x} = m_4 a_{G4x} \quad (37) \quad F_{14y} - F_{43y} - P_4 = m_4 a_{G4y} \quad (38)$$

$$(R_{14x}F_{14y} - R_{14y}F_{14x}) - (R_{34x}F_{43y} - R_{34y}F_{43x}) = I_{G4}\alpha_4 \quad (39)$$

Os sistemas de nove equações e nove incógnitas pode ser agrupado numa equação matricial linear do tipo  $AX=B$  (42) segundo Norton (2010). A matriz A [9x9] é formada pelos coeficientes das incógnitas da matriz X [9x1]. A matriz B [9x1] é formada pelas componentes x e y das forças inerciais, momentos inerciais e componentes das forças peso.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -R_{12y} & R_{12x} & -R_{32y} & R_{32x} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_{23y} & -R_{23x} & -R_{43y} & R_{43x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_{34y} & -R_{34x} & -R_{14y} & R_{14x} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{12x} \\ F_{12y} \\ F_{32x} \\ F_{32y} \\ F_{43x} \\ F_{43y} \\ F_{14x} \\ F_{14y} \\ T_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_2 a_{G2x} \\ m_2 a_{G2y} - P_{2y} \\ I_{G2}\alpha_2 \\ m_3 a_{G3x} \\ m_3 a_{G3y} - P_{3y} \\ I_{G3}\alpha_3 \\ m_4 a_{G4x} \\ m_4 a_{G4y} - P_{4y} \\ I_{G3}\alpha_3 \end{bmatrix} \quad (40)$$

Onde os vetores de posição presentes na matriz A e ilustrado na figura (2) são obtidos através de análise geométrica.

Este sistema foi resolvido utilizando o software *Matlab* considerando que  $X = A^{-1}B$  para as forças de reações nas juntas e torque necessário.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

A partir das equações apresentadas na metodologia e desenvolvidas no *Matlab* foi possível obter os seguintes gráficos em função do tempo.

Figura 3. Velocidade nas Juntas Moveis A e B.  
Fonte: Autoria Própria

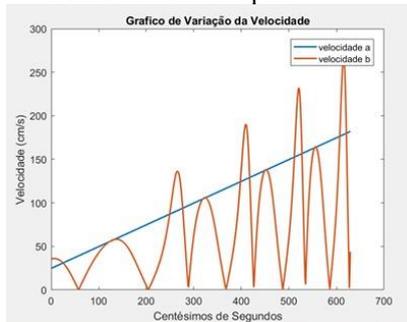


Figura 5. Forças de Reação nas Juntas Fixas e Moveis.  
Fonte: Autoria Própria

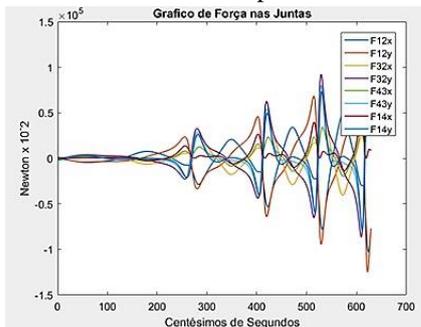


Figura 4. Aceleração nas Juntas Moveis A e B e Centros de Gravidade. Fonte: Autoria Própria

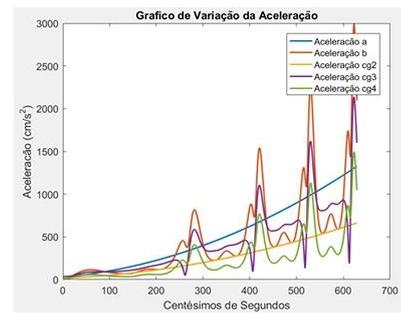
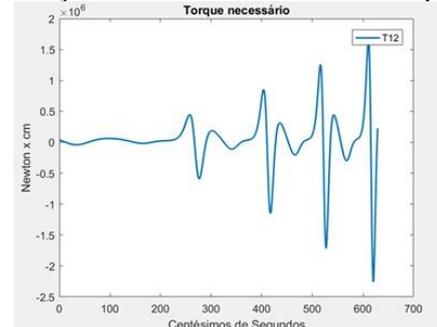


Figura 6. Torque necessário para garantir as acelerações definidas. Fonte: Autoria Própria



Pode-se observar com a análise gráfica que a medida em que a velocidade aumenta em função do tempo todos os outros parâmetros aumentam, sendo assim determinante para caracterização destes parâmetros em uma possível aplicação. Pode-se observar ainda pela Fig. 6 que o torque T12 necessário para o funcionamento do mecanismo é cíclico e se apresenta com oscilações significativas que podem requerer um motor excessivamente grande para transmitir o torque requerido pelos picos, requerendo assim cuidados na execução de projeto de sistema mecânico de forma que se façam as compensações necessárias para não causar bloqueios, reversões, vibrações ou até mesmo exercer uma força cisalhante provocando fratura ou empenamento na estrutura. Estas compensações podem ser feitas utilizando recursos de controle eletrônico do torque motor, tal como inversor de frequência, ao se rever as posições dos centros de massa de cada elo, bem como utilizar controle de torque de entrada usando o volante de inércia, que poderá permitir a minimização das variações.

## CONCLUSÃO

As análises cinemáticas e dinâmicas desenvolvidas nesse trabalho com a utilização de recursos computacionais demonstraram que o método desenvolvido é bastante eficaz e com grande aplicabilidade nos projetos de engenharia. Foi possível avaliar os esforços cíclicos que atuam nas juntas e o torque necessário para obtenção dos momentos angular e linear respectivamente. Os resultados obtidos apresentam pequenas variações em relação à literatura estudada, o que indica que teorias da cinemática e dinâmica de mecanismos foram bem aplicadas.

## REFERÊNCIAS

- Norton, L R. Cinemática e Dinâmica dos Mecanismos. Porto Alegre: Amgh Ed. Ltda, 2010
- Pivetta, C.S. Estudo Das Reações Dinâmicas De Um Mecanismo Planar De Quatro Barras Usando O Ms Excel. XV Encontro Latino Americano de Iniciação Científica e XI Encontro Latino Americano de Pós-Graduação, Faculdade de Tecnologia de São José dos Campos/Escola de Engenharia, São José dos Campos,SP,
- Veloza, Bruno Niche. Mecanismo Para Elevação De Uma Pessoa Com Deficiência Aplicado A Cadeira De Rodas. 2012. 25 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Mecânica, Departamento de Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2012.
- Flores, Paulo; CLARO, J.c. Pimenta. Cinemática de Mecanismos: Análise Descritiva de Mecanismos. Guimarães: Universidade do Minho Escola de Engenharia, 2007.