

## **SIMULAÇÃO NUMÉRICA DE PÓRTICO COM NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA E CONEXÃO SEMIRRÍGIDA**

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA\*

Dr. Pesquisador Curso de Engenharia Civil, UTFPR, Apucarana-PR, lasouza@utfpr.edu.br

Apresentado no  
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2018  
21 a 24 de agosto de 2018 – Maceió-AL, Brasil

**RESUMO:** Este artigo apresenta uma análise estática de um pórtico plano do tipo galpão duplo incorporando ao modelo a não linearidade geométrica e a conexão semirrígida. Um código computacional é desenvolvido em ambiente Matlab. A formulação Corrotacional de Elementos Finitos é utilizada para a discretização da estrutura. O sistema de equações não lineares é solucionado por um esquema incremental e iterativo proposto aqui a partir da adaptação de um método de terceira ordem convergência, associando-o à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A resposta da estrutura foi alcançada com um menor tempo de CPU, em comparação com o método tradicional de Newton-Raphson.

**PALAVRAS-CHAVE:** Pórtico, não linearidade geométrica, Comprimento de Arco, ligação semirrígida.

### **NUMERICAL SIMULATION OF FRAME WITH GEOMETRIC NONLINEARITY AND SEMI-RIGID CONNECTION**

**ABSTRACT:** This paper presents a static analysis of a double shed incorporating to the model the geometric nonlinearity and the semi-rigid connection. A computational code is developed in Matlab environment. The Finite Element Corrotational formulation is used for the discretization of the structure. The nonlinear equations system is solved by an incremental and iterative scheme proposed here from the adaptation of a method with third-order convergence, associating it with the Linear Arc-Length path-following technique. The structure response was achieved with a shorter CPU time compared to the traditional Newton-Raphson method.

**KEYWORDS:** Frame, geometric nonlinearity, Linear Arc-Length, semi-rigid connection.

### **INTRODUÇÃO**

As metodologias de análise/projeto estrutural passam por uma mudança de paradigma, em que as análises lineares (com adaptações para consideração de efeitos não lineares) estão sendo progressivamente substituídas por análises capazes de englobar diversos efeitos não lineares (segunda-ordem, inelasticidade do aço, semirrígidez das ligações, interação solo-estrutura, efeitos dinâmicos, entre outros). Diversas normas de projeto, mesmo que sugerindo o uso de análises não lineares, ainda apresentam inconsistências no sentido de estabelecer uma conexão entre a etapa da análise e a de projeto estrutural (Santos et al., 2012).

Neste artigo é apresentado um modelo numérico para análise de pórticos planos, por meio do Método Corrotacional de Elementos Finitos, cujos efeitos da não linearidade geométrica e ligações semirrígidas são incorporadas ao modelo. A relação constitutiva do material que constitui os elementos estruturais é elástico-linear. O sistema de equações não lineares que governa o equilíbrio estático da estrutura é solucionado por um esquema incremental e iterativo proposto aqui por meio da adaptação do método de Weerakoon e Fernando (2000), com convergência cúbica, associando-o à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A ligação semirrígida é simulada por um modelo linear, colocando-se molas nas conexões cuja flexibilidade ou rigidez é definida por uma constante  $S_c$ . Um problema de pórtico do tipo galpão duplo é analisado numericamente com o *software* Matlab. Avaliou-se nas simulações os seguintes parâmetros: o tempo de CPU em segundos (t); os

números totais de passos de força (NP) e iterações acumuladas ( $k_{\text{total}}$ ) até a convergência para a solução; e o número médio de iterações por passo de força ( $k_{\text{médio}}$ ).

## MATERIAL E MÉTODOS

A formulação Corrotacional de Elementos Finitos para a viga 2D com dois nós e três graus de liberdade/nó, apresentada por Crisfield (1991) e Yaw (2009), é descrita a seguir. Assume-se que não há deformação de cisalhamento na viga e, então, a seção transversal da mesma é sempre normal ao eixo neutro. Na configuração inicial, as coordenadas dos nós 1 e 2 do elemento de viga no sistema global são  $(X_1, Y_1)$  e  $(X_2, Y_2)$ , respectivamente. O comprimento original  $L_0$  é dado pela seguinte equação:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2}. \quad (1)$$

Para o elemento de viga na sua configuração corrente, as coordenadas nodais globais são  $(X_1 + u_1, Y_1 + v_1)$  para o nó 1 e  $(X_2 + u_2, Y_2 + v_2)$  para o nó 2, onde  $u_1$  é o deslocamento do nó 1 na direção X e  $v_1$  é o deslocamento do nó 1 na direção Y. O comprimento corrente  $L$  é:

$$L = \sqrt{(X_2 + u_2 - X_1 - u_1)^2 + (Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1)^2}. \quad (2)$$

O deslocamento axial local ( $u_l$ ) do elemento é calculado por:

$$u_l = \frac{L^2 - L_0^2}{L + L_0}. \quad (3)$$

A deformação específica  $\varepsilon$  é assumida constante e é determinada por  $\varepsilon = u_l/L_0$ . A força axial ( $N$ ) da viga é então dada por:

$$N = \frac{EAu_l}{L_0}, \quad (4)$$

na qual  $A$  é a área da seção transversal e  $E$  é o módulo de Young. Usando a análise estrutural padrão, os momentos locais nas extremidades do elemento de viga são relacionados com as rotações nodais locais ( $\theta_{1l}$  e  $\theta_{2l}$ ) e são dados por:

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{L_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1l} \\ \theta_{2l} \end{Bmatrix}, \quad (5)$$

na qual  $I$  é o momento de Inércia. As rotações nodais locais são computadas por:

$$\theta_{1l} = \arctan\left(\frac{\cos\beta \sin\beta_1 - \sin\beta \cos\beta_1}{\cos\beta \cos\beta_1 + \sin\beta \sin\beta_1}\right), \quad (6)$$

$$\theta_{2l} = \arctan\left(\frac{\cos\beta \sin\beta_2 - \sin\beta \cos\beta_2}{\cos\beta \cos\beta_2 + \sin\beta \sin\beta_2}\right), \quad (7)$$

na qual  $\beta_1 = \theta_1 + \beta_0$  e  $\beta_2 = \theta_2 + \beta_0$ . Os ângulos  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações nodais globais calculadas do sistema de equações globais, e as expressões para os ângulos inicial e corrente da barra,  $\beta_0$  e  $\beta$ , são, respectivamente:

$$\beta_0 = \arctan\left(\frac{Y_2 - Y_1}{X_2 - X_1}\right), \quad (8)$$

$$\beta = \arctan\left(\frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}\right). \quad (9)$$

A matriz de rigidez tangente elementar  $\mathbf{K}_{el}$  é determinada pela expressão:

$$\mathbf{K}_{el} = \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} + \frac{N}{L} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{L^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T), \quad (10)$$

na qual  $\mathbf{D}$  é a matriz constitutiva, os vetores  $\mathbf{z}$  e  $\mathbf{r}$  são, respectivamente:

$$\mathbf{z} = [\sin(\beta) \quad -\cos(\beta) \quad 0 \quad -\sin(\beta) \quad \cos(\beta) \quad 0]^T, \quad (11)$$

$$\mathbf{r} = [-\cos(\beta) \quad -\sin(\beta) \quad 0 \quad \cos(\beta) \quad \sin(\beta) \quad 0]^T, \quad (12)$$

e a matriz  $\mathbf{B}$  é:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos(\beta) & -\sin(\beta) & 0 & \cos(\beta) & \sin(\beta) & 0 \\ -\sin(\beta)/L & \cos(\beta)/L & 1 & \sin(\beta)/L & -\cos(\beta)/L & 0 \\ -\sin(\beta)/L & \cos(\beta)/L & 0 & \sin(\beta)/L & -\cos(\beta)/L & 1 \end{bmatrix}. \quad (13)$$

As expressões seguintes são utilizadas para calcular os valores do seno e cosseno do ângulo  $\beta$ , respectivamente:

$$\cos(\beta) = \frac{X_2 + u_2 - X_1 - u_1}{L}, \quad (14)$$

$$\sin(\beta) = \frac{Y_2 + v_2 - Y_1 - v_1}{L}. \quad (15)$$

O vetor de forças internas elementar ( $F_{el}$ ) é determinado por:

$$\mathbf{F}_{el} = \mathbf{B}^T [N \quad \bar{M}_1 \quad \bar{M}_2]^T. \quad (16)$$

O problema básico da análise não linear é encontrar a configuração de equilíbrio de uma estrutura que está sob a ação de carregamentos. O sistema de equações não lineares a ser solucionado e que governa o equilíbrio estático de um pórtico com comportamento não linear geométrico é dado por (Maximiano; Silva; Silveira, 2014):

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}, \lambda) = \mathbf{F}_{int}(\mathbf{u}) - \lambda \mathbf{F}_r, \quad (17)$$

na qual  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais,  $\mathbf{g}$  é o vetor de forças desequilibradas,  $\mathbf{F}_{int}$  é o vetor global de forças internas e  $\lambda$  é o parâmetro de força responsável por escalonar o vetor de referência  $\mathbf{F}_r$ , de magnitude arbitrária. A Equação (17) é um sistema de  $(n+1)$  incógnitas, sendo  $n$  componentes de deslocamento ( $\mathbf{u}$ ) e um parâmetro de força ( $\lambda$ ), mas somente  $n$  equações. Dessa maneira, uma equação adicional de restrição é adicionada ao sistema (Souza et al., 2018):

$$c(\mathbf{u}, \lambda) = 0. \quad (18)$$

A solução do sistema não linear dado pelas Equações (17) e (18) é obtida usando um esquema incremental e iterativo proposto neste artigo por meio de uma adaptação do método de Weerakoon e Fernando (2000) com ordem de convergência cúbica ao problema estrutural. As equações iterativas são dadas por:

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = \mathbf{u}^{(k)} - 2[\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)} - \delta\mathbf{u}^{(k)}) + \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}), \quad (19)$$

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k)}), \quad (20)$$

para todo  $k = 1, 2, \dots$ . Nota-se que o sobrescrito  $k$  é usado para referenciar a iteração anterior e  $(k+1)$  a iteração corrente. O parâmetro de força total ( $\lambda^{(k+1)}$ ) é atualizado por:

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}, \quad (21)$$

na qual  $\delta\lambda^{(k)}$  é o subincremento de força, sendo avaliado segundo a técnica de Comprimento de Arco Linear (Riks, 1972; Riks, 1979).

A distorção primária de uma ligação viga-coluna é a deformação rotacional,  $\theta$ , causada pelo momento de flexão  $M$  no plano. A deformação da conexão tem como efeito a desestabilização da do pórtico, visto que ocorrerá diminuição da rigidez efetiva dos membros conectados. Um aumento da inclinação do pórtico intensificará o efeito P- $\Delta$  e, portanto, a sua estabilidade geral será afetada (Chen; Kishi, 1989). Assim, as características das ligações viga-coluna desempenham um papel muito importante no projeto estrutural. Para este fim, o comportamento da ligação deve ser adequadamente estimado ou previsto, bem como os métodos especificados para análise de projeto estabelecidos. Neste trabalho é utilizado o modelo linear para caracterizar o comportamento da ligação, que necessita apenas de um parâmetro para definir a rigidez da conexão. Em virtude de sua simplicidade, o modelo linear tem sido amplamente utilizado nos estágios iniciais de desenvolvimento de métodos de análise para articulações semirrígidas e na análise de vibração e bifurcação de pórticos semirrígidos. A função momento-rotação pode ser escrita como:

$$M = S_c \phi_c, \quad (22)$$

na qual  $S_c$  é constante e igual ao valor da rigidez inicial da conexão, que pode ser obtida de forma experimental.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere um pórtico do tipo galpão duplo ilustrado na Figura 1a. Essa estrutura apresenta as seguintes propriedades físicas e geométricas:  $E = 2.1 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  $A = 400$  cm<sup>2</sup> e  $I = 13333$  cm<sup>4</sup> para as colunas externas, e  $E = 2.1 \times 10^7$  N/cm<sup>2</sup>,  $A = 200$  cm<sup>2</sup> e  $I = 6666$  cm<sup>4</sup> para os demais elementos estruturais. Esse problema foi analisado numericamente por Von Paraski (2012). Na realização das análises foram considerados os seguintes parâmetros: comprimento de arco inicial  $\Delta l = 1.0$ ; número de iterações desejadas  $N_d = 4$ ; tolerância  $tol = 1.0 \times 10^{-8}$ ; número máximo de iterações  $k_{m\acute{a}x} = 100$ ; e incremento de força  $\Delta P = 1000$  N. Na discretização da estrutura foram considerados 55 elementos finitos de viga e 56 nós. Foram feitas as seguintes análises: (i) não linear geométrica (NLG)

considerando três tipos de conexão entre as colunas e os suportes - rotulada, rígida e semirrígida ( $S_c = 1.0 \times 10^9$  Ncm/rad); e (ii) linear com conexão semirrígida. O algoritmo foi desenvolvido usando o *software* Matlab, versão 8.6 R2015b (Matlab, 2015). Os testes computacionais foram efetuados em um computador Core i7 com 8 GB de memória.

Na Figura 1b são apresentadas as trajetórias de equilíbrio correspondentes ao deslocamento horizontal no nó 1 *versus* força P. As configurações deformadas para diferentes passos de força (NP = 15, 25, 35 e 42) da estrutura são mostradas na Figura 1c, obtidas da análise NLG e apoios semirrígidos. Os resultados numéricos (NP,  $k_{total}$ ,  $k_{médio}$  e t) com os métodos de solução proposto, Newton-Raphson (NR) e Newton-Raphson Modificado (NRM) considerando a análise NLG e conexão semirrígida aparecem na Tabela 1.

Figura 1. Galpão duplo: (a) Esquema estrutural; (b) trajetórias de equilíbrio; e (c) configuração deformada para diferentes passos de força.

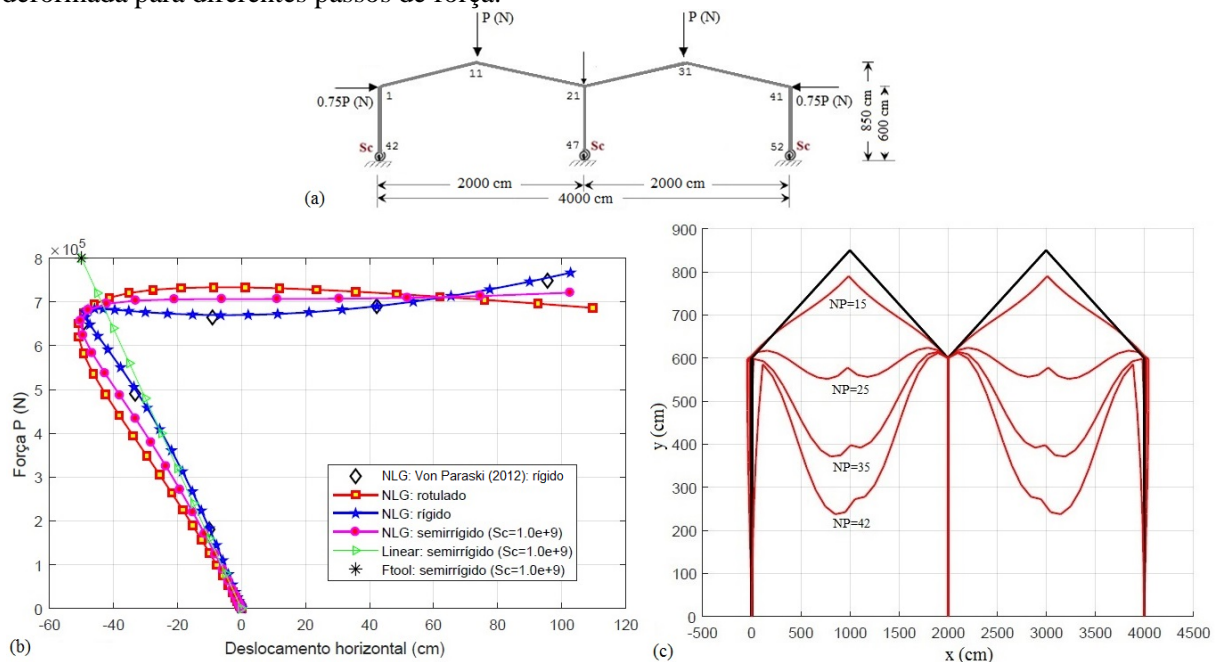


Tabela 1. Resultados numéricos.

Método	NP	$k_{total}$	$k_{médio}$	t (s)
Proposto	31	92	2.9677	0.899159
NR	49	167	3.4082	0.942123
NRM		Não convergiu		

Na Figura 1b, observa-se a boa concordância dos resultados aqui obtidos com os de PARASKI (2012) quanto à análise NLG e ligação rígida, validando o programa desenvolvido em Matlab. Pode-se ver a influência da flexibilidade do suporte por meio dos caminhos de equilíbrio, alterando o comportamento global da estrutura. A consideração do efeito da não linearidade geométrica na análise provoca o surgimento de pontos críticos na trajetória.

A partir dos resultados numéricos na Tabela 1, constata-se o melhor desempenho computacional do método de solução proposto em comparação com o método clássico de NR quanto ao tempo de CPU. O custo da iteração com o método de Weerakoon e Fernando (2000) é mais caro visto que há resolução de um sistema de equações lineares a mais do que na iteração de NR (ver Equações (19) e (20)); no entanto, esse custo é compensado com a diminuição da quantidade de passos de força e iterações acumuladas até a convergência para a solução do problema.

O método NRM apresentou problemas de convergência - a atualização da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  ocorre somente no início do passo de força, mantendo-se constante ao longo do ciclo iterativo. Na simulação, esse método não conseguiu ultrapassar o primeiro ponto limite da trajetória. Pode-se alcançar a convergência alterando-se os parâmetros de entrada, como o comprimento de arco inicial  $\Delta l$ .

## CONCLUSÃO

O analista no projeto estrutural tem por objetivo conceber uma estrutura capaz de obedecer aos requisitos de resistência e deslocamentos para uma determinada combinação de carregamentos. Em geral, assume-se nas análises convencionais de pórticos que as conexões sejam completamente rígidas ou rotuladas. Entretanto as diferenças nos traçados das trajetórias de equilíbrio obtidas nas análises mostram que a consideração da semirrígidez nas conexões não pode ser desprezada, uma vez que afeta o comportamento global da estrutura.

A estabilidade de um sistema estrutural é perdida devido à existência de pontos singulares ou críticos no caminho de equilíbrio. Assim, para assegurar a estabilidade de estruturas esbeltas, deve-se incorporar na análise o efeito da não linearidade geométrica.

A análise estrutural pode envolver modelos de estruturas em que a malha de elementos finitos pode conter muitos nós (20 a 30 mil nós, segundo Perelmuter e Fialko (2005)), além de elementos de vários tipos (barras, placas, cascas, etc.), havendo a necessidade de solucionar um sistema de equações não lineares muito grande. O esquema iterativo de análise proposto neste artigo pode ser útil em simulações de problemas de grande porte, visto que a resposta do problema pode ser alcançada com menos passos de força e iterações acumuladas, e com um menor o tempo de CPU, em comparação com o método tradicional de Newton-Raphson.

## AGRADECIMENTOS

À UTFPR pelo apoio para realização desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- Chen, W. F.; KISHI, N. Semirigid Steel Beam-to-Column Connections. *J. Struct. Eng.*, v. 115, n. 1, p. 105-119, 1989.
- Crisfield, M. A.. *Non-linear Finite Element Analysis of Solids and Structures*. Vol 1. John Wiley & Sons Ltd., Chichester, England, 1991.
- Matlab, versão 8.6.0 (R2015b). Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2015.
- Maximiano, D. P.; Silva, A. R. D.; Silveira, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. *Revista Escola de Minas*(Impresso), v. 67, p. 143-150, 2014.
- Perelmuter, A. V.; Fialko, S. Y. *Problems of computational mechanics relate to finite-element analysis of structural constructions*. 2005.
- Riks, E. The application of newtons method to the problem of elastic stability, *Journal of Applied Mechanics*, v. 39, n. 4, p. 1060-1065, 1972.
- Riks, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems, *International Journal of Solids and Structures*, v. 15, p. 529-551, 1979.
- Santos, M. N.; Rocha, P. A. S.; Silva, A. R. D. D.; Silveira, R. A. D. M. Application of a nonlinear hybrid finite element in the structural steel modeling. *Rem: Revista Escola de Minas*, v. 65, n. 1, p. 19-28, 2012.
- Souza, L. A. F.; Castelani, E. V.; Shirabayashi, W. V. I.; Aliano Filho, A.; Machado, R. D. Trusses Nonlinear Problems Solution with Numerical Methods of Cubic Convergence Order. *Trends in Applied and Computational Mathematics*, v. 19, n. 1, p. 161-179, 2018.
- Von Paraski, N. *Análise estática não linear de pórticos planos via Matlab*. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal Fluminense, Volta Redonda, RJ, Brasil, 2012.
- Weerakoon, S.; Fernando, T. G. I. A variant of Newton's method with accelerated third-order convergence. *Appl. Math. Lett.*, v. 13, p. 87-93, 2000.
- Yaw, L. L. 2D Corotational Beam Formulation. Engineering Dept., Walla Walla University, personal web page, 2009.