

ESTUDO DE MÉTODOS INCREMENTAIS E ITERATIVOS PARA A SOLUÇÃO NÃO LINEAR DE PÓRTICOS PLANOS

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA*

Professor Doutor, UTFPR, Apucarana-PR, lasouza@utfpr.edu.br

Apresentado no
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2016
29 de agosto a 1 de setembro de 2016 – Foz do Iguaçu, Brasil

RESUMO: Com o avanço tecnológico, o grau de segurança obtido e o baixo custo de pesquisas computacionais, comparados com ensaios experimentais, vêm possibilitando cada vez mais a aplicação de técnicas numéricas na solução não linear de problemas de estruturas. Os modelos constitutivos de dano têm sido usados como uma importante ferramenta de análise da perda de rigidez de estruturas com a finalidade de prever a degradação do material. O objetivo deste artigo é comparar os métodos de solução de Newton - Raphson Padrão e Modificado, de Broyden e de Potra - Pták, associados à técnica de continuação Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior. Os algoritmos são aplicados em um problema de pórtico plano com não linearidade física, utilizando o Método dos Elementos Finitos. O comportamento do material é descrito por um modelo fundamentado na Mecânica do Dano Contínuo. Na obtenção do vetor de força interna, o módulo de rigidez à flexão equivalente é obtido com a divisão da seção transversal em camadas.

PALAVRAS-CHAVE: Broyden, Potra - Pták, Mecânica do Dano, técnica de continuação.

STUDY OF ITERATIVE AND INCREMENTAL METHODS FOR NON LINEAR SOLUTION OF PLANES FRAMES

ABSTRACT: With advances in technology, the degree of safety obtained and the low cost of computational researches, compared with experimental tests, have enabled the application of numerical techniques for solution of nonlinear structures problems. The damage constitutive models have been used as an important tool to analyze the structures stiffness loss in order to prevent the material degradation. The aim of this paper is to compare the methods Standard and Modified Newton - Raphson, Broyden and Potra - Pták, associated to Arc-Length Control technique with Orthogonal Iteration to Previous Iteration Tangent. The algorithms are applied to plane frame problem with physical nonlinearities, using the Finite Element Method. The behavior of the material is described by a model based on Continuum Damage Mechanical. In obtaining the internal force vector, the equivalent flexural stiffness modulus is obtained by dividing the cross section in layers.

KEYWORDS: Broyden, Potra - Pták, Damage Mechanical, path-following technique.

INTRODUÇÃO

Muitos problemas na análise estrutural estão caracterizados pelo comportamento inelástico dos materiais (não linearidade física) que conformam as estruturas, identificando fenômenos tais como plasticidade, dano, fraturamento, entre outros, os quais mudam substancialmente as propriedades de rigidez do sistema. Um problema gerado pela inelasticidade dos materiais é a ocorrência de deformações localizadas no sistema. A consideração desse fenômeno aumenta a complexidade da análise, e pode levar a problemas na implementação numérica acontecendo, inclusive, a interrupção da análise por problemas de convergência ou mal condicionamento numérico. Nesse contexto, a análise numérica de estruturas com características inelásticas de material requer técnicas de controle de iteração e força (técnicas de continuação) que permitam avaliar as mudanças de rigidez do sistema ocasionadas pelo comportamento não linear dos materiais (Muñoz & Roehl, 2012).

Neste artigo é feito um estudo comparativo com o auxílio do programa Scilab entre os métodos de solução de Newton - Raphson Padrão e Modificado, de Broyden e de Potra - Pták, associados à técnica de continuação Controle de Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à

Tangente da Iteração Anterior, a partir de um problema de pórtico plano com não linearidade física, utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). A relação constitutiva do material é descrita por um modelo fundamentado na teoria da Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998), com a possibilidade de prever o comportamento diferenciado tanto à tração quanto à compressão. Na obtenção do vetor de força interna, o módulo de rigidez à flexão equivalente é obtido com base nas variáveis deformação específica e dano em cada camada de divisão da seção transversal do elemento estrutural. O desempenho computacional dos métodos é avaliado segundo os parâmetros: número total de incrementos de força (NP); número total de iterações (It); e tempo de processamento.

MODELO DE DANO

Para descrever o comportamento do material, utiliza-se um modelo baseado na Mecânica do Dano Contínuo proposto por Manzoli (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva

σ é expressa por:

$$\sigma = E_0 \varepsilon \quad (1)$$

O limite de dano inicial r_0 é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão limite de proporcionalidade f_0 da seguinte forma:

sendo B_1 um parâmetro do modelo. Define-se a norma da tensão efetiva σ por:

$$\quad (3)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano r é dado pelo máximo valor da variável λ durante o processo de carregamento, tal que:

A variável λ pode ser expressa, em termos da deformação específica ε , por:

$$\quad (5)$$

A variável de dano d é escrita em função do limite de dano por:

$$\quad (6)$$

Variando-se a função que descreve o módulo H na Eq. (6), têm-se os seguintes comportamentos constitutivos: regime elastodegradável perfeito (perfeitamente plástico); encruamento linear positivo (endurecimento); encruamento linear negativo (abrandamento); e abrandamento exponencial.

MÉTODO DE BROYDEN

Nos métodos Quase - Newton, a sequência $\mathbf{u}^{(k)}$ é estabelecida por meio da expressão (Crisfield, 1991):

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{f}^{(k-1)} \quad (7)$$

sendo $\mathbf{s}^{(k)}$ a solução do sistema de equações dado por:

$$\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{s}^{(k)} = -\mathbf{f}^{(k-1)} \quad (8)$$

A matriz de rigidez \mathbf{K} é atualizada a cada iteração, e é imposta a condição de que tal matriz satisfaça a seguinte equação:

$$\mathbf{A}^{(k)} \mathbf{A}^{(k-1)} - \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{A}^{(k)} = \mathbf{0} \quad (9)$$

A escolha da estratégia na obtenção da matriz de rigidez define o método Quase - Newton ou método Secante. No método de Broyden a matriz de rigidez $\mathbf{K}^{(k)}$ é determinada pela equação:

$$\mathbf{K}^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)} - \mathbf{A}^{(k-1)} \mathbf{A}^{(k-1)^{-1}} \mathbf{A}^{(k)} \quad (10)$$

onde a matriz $\mathbf{A}^{(k)}$ é dada por:

sendo

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(\mathbf{u}) - \mathbf{u}(\mathbf{u} - \mathbf{u})$$

MÉTODO DE POTRA-PTÁK

Potra e Pták (1984) desenvolveram um método de dois passos baseado no método de Newton. Consistindo de duas avaliações do sistema de equações dado e necessitando apenas do cálculo de derivadas de primeira ordem, foi possível obter uma convergência cúbica e um índice de eficiência maior que o do método de Newton (Soleymani et al., 2012). O método de Potra-Pták é dado da seguinte forma (Souza, 2015):

$$\mathbf{u} - \mathbf{u} = \mathbf{u} - \mathbf{u} + \mathbf{u} - \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{u} \mathbf{u} - \mathbf{u} \quad (12)$$

)

(13)

)

TÉCNICA DE CONTINUAÇÃO

A metodologia para a solução de problemas estruturais não lineares deve ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa (identificando e passando por todos os pontos críticos). Para esse fim, utiliza-se um processo incremental-iterativo que consiste de duas etapas (Rocha, 2000):

i) a partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se um incremento de força (definido como parâmetro de força inicial - $\Delta \mathcal{L}^{(1)}$), procurando satisfazer alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção desse parâmetro, determina-se o incremento inicial de deslocamentos nodais $\Delta \mathbf{u}^{(1)}$; e

ii) na segunda etapa de solução, procura-se por meio de uma estratégia de continuação corrigir a solução incremental inicialmente proposta, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura. Se as iterações envolverem deslocamentos nodais (\mathbf{u}) e o parâmetro de força (\mathcal{L}), então uma equação adicional de restrição é requerida. O formato dessa equação é o que distingue as várias estratégias de iteração.

As análises não lineares são efetuadas com a estratégia de continuação Controle de Comprimento de Arco com Iteração Ortogonal à Tangente da Iteração Anterior (CTIA). Na Tabela 1 são apresentadas as equações para a avaliação do parâmetro de força inicial ($\Delta \mathcal{L}^{(1)}$), e para o cálculo do parâmetro de força para a correção da solução incremental inicial ($\Delta \mathcal{L}^{(k)}$).

Há possibilidade de que o incremento de deslocamento tenda ao infinito em pontos próximos a um ponto limite da trajetória de equilíbrio. Para evitar que isso ocorra, limitou-se este deslocamento a um valor máximo. Para o método CTIA foi considerada a seguinte condição quanto ao incremento de deslocamento: se $\|\Delta \mathbf{u}^{(k)}\| > u_{\text{máx}}$, então:

(14)

O sinal de $\Delta \mathcal{L}^{(1)}$ é avaliado da seguinte forma: se $\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u}^{(1)} < 0$, então:

$$\Delta \mathbf{u}^{(1)} = - \Delta \mathbf{u}^{(1)}, \quad (15)$$

$$\Delta \mathcal{L}^{(1)} = - \Delta \mathcal{L}^{(1)}. \quad (16)$$

Assim, assegura-se que a trajetória de equilíbrio será percorrida corretamente mesmo se houver uma reversão do deslocamento.

Tabela 1. Parâmetros de Força $\Delta \mathcal{L}^{(1)}$ e $\Delta \mathcal{L}^{(k)}$.

Método	k = 1	k = 2, 3, ..., N
CTIA		

RESULTADOS E DISCUSSÃO

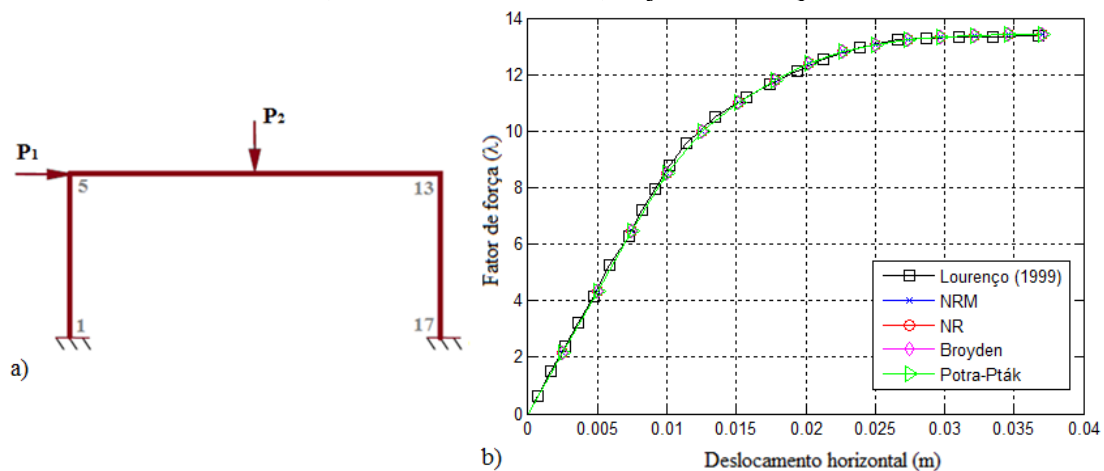
Seja o problema de um pórtico de um andar com 6,0 m de largura, 3,0 m de altura e sujeito às forças concentradas P_1 e P_2 , conforme o modelo estrutural apresentado na Figura 1a. A viga do pórtico tem seção transversal retangular (0,30 × 0,40) m² e os pilares seção transversal quadrada (0,30 × 0,30) m². O material que constitui os elementos estruturais apresenta comportamento perfeitamente plástico. Este problema foi estudado por Lourenço (1999). Na Tabela 2 são apresentados os parâmetros

adotados no Modelo de Dano e na estratégia de continuação CTIA. As seções transversais dos elementos estruturais foram divididas em 20 camadas de mesma espessura, conforme o procedimento apresentado em Souza (2013). Na discretização por elementos finitos foram utilizados 16 elementos de pórtico, sendo quatro elementos para cada pilar e oito para a viga. Na Figura 1b são apresentadas as trajetórias de equilíbrio (deslocamento horizontal nó 5 *versus* fator de força λ) obtidas com os métodos de Newton - Raphson Padrão (NR), Newton - Raphson Modificado (NRM), de Broyden e de Potra - Pták, comparando-as com a curva obtida por Lourenço (1999).

Tabela 2. Parâmetros do Modelo de Dano e da técnica CTIA.

Modelo de Dano	CTIA
$E_0 = 200 \text{ GPa}$	$\zeta_s = 0,01$
$f_{0c} = f_{0t} = 200 \text{ MPa}$	$u_{\text{máx}} = 0,5$
$H_c = H_t = 0$	$\zeta P_1 = 100 \text{ kN}$
$B_1 = 1$	$\zeta P_2 = 150 \text{ kN}$

Figura 1. Pórtico de um andar: a) modelo estrutural; e b) trajetórias de equilíbrio.



Na Tabela 3 são apresentados os valores dos parâmetros NP, It e tempo de processamento (em segundos) obtidos das simulações. Observa-se, nessa tabela, que a análise com o método de Broyden obteve o menor tempo de processamento (tempo de CPU) e número total de iterações, em contraste com os demais métodos. Vê-se que o tempo obtido com o método de Potra - Pták foi inferior ao obtido com o método de NR (apesar do custo computacional da iteração daquele método ser maior do que deste, há um ganho na velocidade de convergência em função do menor número de iterações). Deve-se ressaltar que não estão contabilizados no tempo a geração da malha (pré-processamento) e a visualização dos resultados (pós-processamento).

Tabela 3. Resultados numéricos para o pórtico de um andar.

NR		NRM		Broyden		Potra - Pták	
Tempo	NP(It)	Tempo	NP(It)	Tempo	NP(It)	Tempo	NP(It)
11,993874	15(582)	6,690070	15(655)	3,753597	15(181)	8,898579	15(304)

CONCLUSÃO

A partir dos resultados obtidos, o código computacional desenvolvido com o auxílio do *software* Scilab mostrou-se eficiente devido à simplicidade de implementação e ao razoável desempenho nos exemplos numéricos estudados, demonstrando, assim, potencialidade na sua aplicação em análises de pórticos com não linearidade física. O tipo de lei constitutiva adotada para o material é uma das causas da maior ou menor eficiência dos processos para a busca do equilíbrio. Uma lei elastoplástica perfeita pode conduzir a uma situação em que a estrutura apresente grandes deformações antes de alcançar o equilíbrio. A crescente simulação de modelos estruturais complexos - por meio do Método dos Elementos Finitos - tem exigido a manipulação de grande quantidade de

dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do problema estrutural.

Observa-se um melhor desempenho computacional com o procedimento incremental e iterativo baseado no método de Broyden, quanto ao número total de iterações e ao tempo de processamento. O custo computacional para a resolução dos sistemas de equações lineares gerados da discretização pelo MEF a cada iteração costuma a ser, em geral, o mais dispendioso durante o processo. Sendo assim, com a redução significativa de iterações até a convergência, o tempo de processamento para se obter a resposta da análise estrutural diminui.

Como sugestão de pesquisa futura, sugere-se a implementação de algoritmos que permitam efetuar ciclos de carregamento e descarregamento, adequar o código implementado para estudos em análise dinâmica e a consideração da não linearidade geométrica.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à UTFPR pelo apoio financeiro e possibilidade de desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Crisfield, M. A. A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap-through. *Computers and Structures*, v. 13, p. 52-62, 1981.
- Lourenço, P. B. Métodos computacionais na mecânica dos sólidos não linear. Relatório 99-DEC/E-1, Departamento de Engenharia Civil, Universidade do Minho, 1999.
- Manzoli, O. L. Um modelo analítico y numérico para la simulati6n de discontinuidades fuertes em la mecânica de sólidos. Barcelona: Escola T6cnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals i Ports, Universitat Polit6cnica de Catalunya, 1998. Tese (Doutorado).
- Muñoz, L. F. P.; Roehl, D. M. Comparação de Métodos de Continuação em Problemas com Análise Inelástica. In: *Mecânica Computacional*, Vol. XXXI, Salta. Anais... Salta: Mecânica Computacional, Vol. XXXI, 2012.
- Potra, F. A.; Pták, V. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. *Research Notes in Mathematics*, v. 103, 1984.
- Rocha, G. Estratégias de incremento de carga e de iteração para análise não linear de estruturas. Ouro Preto: Programa de Pós-Graduação do Departamento de Engenharia Civil, Escola de Minas da Universidade Federal de Ouro Preto, 2000. Dissertação (Mestrado).
- Soleymani, F.; Sharma, R.; Li, X.; Tohidi, E. An optimized derivative-free form of the potra-pták method. *Mathematical and Computer Modelling*, v. 56, n. 5, p. 97-104, 2012.
- Souza, E. A. Métodos Iterativos para Problemas Não Lineares. Volta Redonda: Programa de Pós-graduação em Modelagem Computacional, Universidade Federal Fluminense, 2015. Dissertação (Mestrado).
- Souza, L. A. F. Análise estrutural unidimensional de viga de concreto armado reforçada com PRFC. *Ciência & Engenharia*, v. 22, p. 65-72, 2013.