

ANÁLISE ESTRUTURAL DE VIGAS BIENGASTADAS COM APLICAÇÕES NA ENGENHARIA CIVIL UTILIZANDO O FORMALISMO LAGRANGIANO.

RAILSON SILVA RIBEIRO¹

¹Me. em Engenharia de Materiais, IFMA, São Luís-MA, railson15ribeiro@hotmail.com;

Apresentado no
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC
06 a 09 de outubro de 2025

RESUMO: Este trabalho apresenta uma análise estrutural da deflexão e dos modos normais de vibração de uma viga biengastada, utilizando o Formalismo Lagrangiano como ferramenta teórica e computacional. A partir da modelagem da viga como um sistema de massas e molas, foram obtidas expressões para a Lagrangiana e, conseqüentemente, as equações do movimento. A análise considerou tanto o regime discreto, com número finito de graus de liberdade, quanto o regime contínuo, utilizando equações diferenciais parciais. Foram determinadas as frequências naturais de vibração e a curva de deflexão estática da viga submetida ao próprio peso. As simulações foram realizadas com o auxílio do software MuPAD/MATLAB, possibilitando a visualização dos modos normais de vibração. Os resultados obtidos demonstram a eficácia do Formalismo Lagrangiano para análise de estruturas hiperestáticas na engenharia civil, oferecendo uma alternativa eficiente aos métodos clássicos da mecânica newtoniana.

PALAVRAS-CHAVE: Vigas biengastadas, vibrações estruturais, deflexão, formalismo lagrangiano.

STRUCTURAL ANALYSIS OF CLAMPED–CLAMPED BEAMS WITH APPLICATIONS IN CIVIL ENGINEERING USING THE LAGRANGIAN FORMALISM.

ABSTRACT: This work presents a structural analysis of the deflection and normal vibration modes of a clamped–clamped (encastre) beam using the Lagrangian Formalism as a theoretical and computational tool. By modeling the beam as a system of masses and springs, the Lagrangian expressions and the corresponding equations of motion were derived. The analysis considered both the discrete regime, with a finite number of degrees of freedom, and the continuous regime, using partial differential equations. Natural frequencies and the static deflection curve of the beam under its own weight were determined. Simulations were performed using MuPAD/MATLAB software, allowing the visualization of the normal vibration modes. The results demonstrate the effectiveness of the Lagrangian Formalism for analyzing hyperstatic structures in civil engineering, offering an efficient alternative to classical Newtonian mechanics methods.

KEYWORDS: Clamped–clamped beam, structural vibrations, deflection, lagrangian formalism.

INTRODUÇÃO

Um dos problemas enfrentados pela engenharia está associado à função estrutural, sendo um destes relacionado ao fenômeno da ressonância. As estruturas em geral são constituídas por elementos estruturais, por meio dos quais as cargas são transmitidas desde o topo das edificações até as fundações (Figueiredo, 2014). No ramo da construção civil atual, um projetista busca a redução dos custos, mas mantendo a qualidade. Assim, surgiu a necessidade de uma avaliação mais criteriosa das forças atuantes sobre os elementos da estrutura (Selli, 2015).

As vigas são elementos sempre presentes na construção civil, visto que elas garantem a sustentação e fornecem segurança. A norma (ABNT-NBR 6118,2007) define vigas como sendo elementos lineares nos quais a flexão é preponderante. Na construção civil costuma ser um elemento estrutural sujeito a cargas transversais.

O estudo das forças que atuam sobre estruturas tais como vigas e barras pode ser feito por meio da Mecânica Newtoniana. A análise será mais simples quando o número de reações corresponde a quantidade de equações, no que se tipo isostático. Este fato ocorre de maneira contrária nas estruturas hiperestáticas, que possuem mais reações do que equações. Alternativamente, o Formalismo Lagrangiano não enfrenta a mesma dificuldade, visto que o nele não precisamos considerar as forças vínculo.

Neste trabalho, vamos analisar a deflexão e modos normais de vibrações de uma viga biengastada, por meio do Formalismo Lagrangiano e partindo de uma analogia entre barras e vigas, obtendo a curva de deflexão e as frequências dos modos normais de vibração.

MATERIAL E MÉTODOS

Foi realizada uma revisão bibliográfica partindo dos livros e artigos especializados sobre o tema, afim de verificar e testar as hipóteses formuladas, realizou-se um estudo com simulações utilizando o software MuPAD incluído no MATLAB.

Formalismo Lagrangiano

A Mecânica Newtoniana descreve o movimento dos corpos a baixas velocidades (relativamente à velocidade da luz) e de massa relativamente grande (comparativamente às massas das partículas elementares), através dos princípios da dinâmica (leis de Newton). Já a Mecânica Lagrangiana é diferente e parte dos conceitos de energia cinética e energia potencial (Neto, 2004). A Lagrangiana é a diferença entre energia cinética e potencial. Sua forma explícita é escrita da seguinte forma:

$$L = K - U, \quad (1)$$

onde L é a Lagrangiana e K é a energia cinética total do sistema e o U é a energia potencial.

A energia potencial elástica é a energia acumulada em corpos elásticos. Dentre as propriedades dos materiais existe uma propriedade chamada de elasticidade. Um corpo elástico, ao ser deformado, armazena energia até que a força seja removida e, logo após isso, o objeto tende a retornar para seu estado normal tal como em uma mola, de modo que:

$$U = \frac{k}{2} q^2, \quad (2)$$

onde U é a energia potencial elástica (Joule), k é a constante elástica (N/m) e o q deformação (alongamento ou encurtamento) sofrida pelo objeto.

A energia cinética está associada ao movimento dos corpos, sendo proporcional à massa e ao quadrado da velocidade de cada partícula que se movimenta.

$$K = \frac{m\dot{q}^2}{2}, \quad (3)$$

onde K é a energia cinética, m é a massa e o \dot{q} velocidade do objeto.

Vibrações Longitudinais de uma Barra ou Viga

A Mecânica Lagrangiana se aplica tanto para sistemas que podem ser subdivididos em um número finito de elementos (sistemas discretos), portanto, um número finito de graus de liberdade, como também em sistemas com um número infinito de graus de liberdade (meio contínuo) (Venceslau, 2015). O modelo vibratório é caracterizado por deslocamentos ao longo do tempo, com transformação de energia potencial em cinética e vice-versa, resultando em movimento oscilatório. As forças atuantes no corpo responsáveis pela tendência do sistema em retornar à sua configuração inicial, são denominadas forças de restituição ou forças restauradoras (Venceslau, 2015). Tomando uma barra com dois engastes, podemos transforma-la em um sistema formado de n massas e $n + 1$ molas:

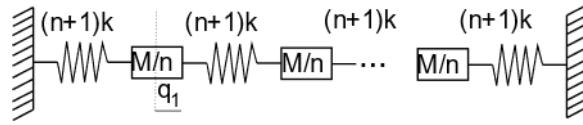


Figura 1. Sistema com n graus de liberdade.
Identificando a energia potencial elástica das Molas

$$\begin{aligned}
 U &= \frac{1}{2}(n+1)kq_1^2 \\
 &+ \frac{1}{2}(n+1)k \sum_{i=2}^n (q_i - q_{i-1})^2 \\
 &+ \frac{1}{2}(n+1)kq_n^2.
 \end{aligned} \tag{4}$$

Como também a energia cinética:

$$K = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \frac{M}{n} \dot{q}_i^2, \tag{5}$$

As frequências dos modos normais serão, portanto:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{2 \cdot 2(2+1)}{M} k} = \sqrt{\frac{6k}{M}} \tag{6}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{3}{2} \frac{2 \cdot 2(2+1)}{M} k} = \sqrt{\frac{18k}{M}} \tag{7}$$

A título de informação, para valores unitários dos parâmetros, o modelo com um número finito de graus de liberdade concordará com a Equação 17 em duas casas decimais apenas para 986 massas.

Deflexão da Viga Biengastada

Embora os resultados da seção anterior tenham sido bem instrutivos, é importante lembrar que a viga é deformável predominantemente por momento fletor e suposto extremamente rígido à força cortante e, portanto, as vibrações devem ser predominantemente transversais. Para desenvolvermos o Formalismo Lagrangiano, precisamos escrever a energia potencial associada a essa flexão.

A energia total potencial elástica armazenada em todas as molas deve ser:

$$U = \sum_i \frac{1}{2} (n+1) \cdot \kappa \cdot (\theta_i - \theta_{i-1})^2, \tag{8}$$

onde κ é a constante torcional de cada mola. No limite para $n \rightarrow \infty$, a energia potencial se torna:

$$U = \frac{1}{2} l \kappa \int_0^l \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 dx, \tag{9}$$

Por fim, agora obtemos a densidade Lagrangiana:

$$\mathcal{L} = \frac{\rho \dot{y}^2}{2} - \frac{1}{2} E I y''^2 - \rho g y. \tag{10}$$

O último termo na Equação 21 representa a densidade de energia potencial gravitacional. A equação do movimento pode ser obtida normalmente utilizando o princípio de ação mínima de Hamilton através da equação de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{y}} - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y'} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial y''} = 0. \tag{11}$$

Devido à natureza dos engastes, $y(0) = y(l) = 0$, assim como $y'(0) = y'(l) = 0$. Com essas condições podemos determinar a solução da Equação 24 que é de quarta ordem:

$$y = -\frac{g\rho}{24EI} x^2(l-x^2), \tag{12}$$

Cujo gráfico é representado na Figura 3.

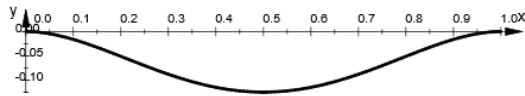


Figura 2. Deflexão de uma viga submetida ao próprio peso. Os apoios impõem as condições de contorno.

Frequência dos Modos Normais da Viga Biengastada

Agora consideraremos as vibrações livres da viga na ausência de outras forças externas. Para vibrações de pequena amplitude, podemos considerar:

$$y \rightarrow -\frac{g\rho}{24EI}x^2(l-x^2) + u(t,x). \quad (13)$$

A partir de uma análise gráfica, podemos verificar os possíveis valores do número de onda:

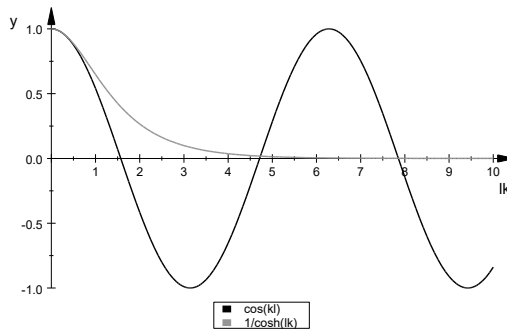


Figura 3. Plot de $\cos(kl)$ e $1/\cosh(kl)$.

A primeira solução é encontrada quando $kl = 0$, mas essa solução não é útil pois nos leva em $u = 0$. As outras acontecem em:

$$kl \approx \frac{\pi}{2} + \pi i \quad (14)$$

Para $i \geq 1$. Podemos então considerar:

$$k = \frac{\pi}{2l} + \frac{i}{l} + \Delta k \quad (15)$$

Aplicando a expansão da série de Taylor até a primeira ordem, chegaremos à expressão para Δk .

$$\Delta k \approx \frac{\cosh\left(\frac{\pi}{2} + \pi i\right)}{i \sinh\left(\frac{\pi}{2} + \pi i\right) - l \cosh\left(\frac{\pi}{2} + \pi i\right)^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} + \pi i\right)} \quad (16)$$

Correspondendo às frequências:

$$\omega_i = \left\{ 2,27 \sqrt{\frac{EI\pi^2}{\rho l^2}}; 6,25 \sqrt{\frac{EI\pi^2}{\rho l^2}}; 12,2 \sqrt{\frac{EI\pi^2}{\rho l^2}} \dots \right\} \quad (17)$$

As soluções estacionárias da Equação 27 possuem o perfil representado na Figura 5.

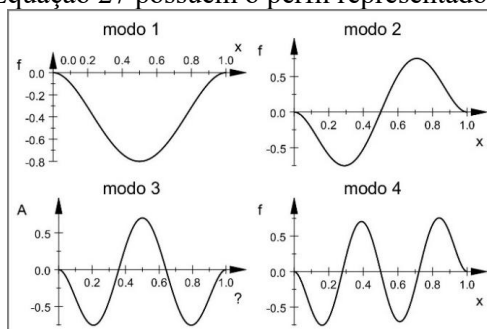


Figura 4. Os quatro primeiros modos normais de vibração $u(t, x)$ da viga biengastada para um dado valor de t .

Da Figura 5, vemos que os modos normais da viga se assemelham muito aos modos normais de uma corda, com a diferença de que próximo das extremidades, apresentam uma "cauda" com um formato diferente devido as condições adicionais de contorno sobre as derivadas requeridas pelos engastes. Verifica-se que a aproximação da Equação 32 funciona melhor para os valores de i maiores. Caso seja necessário, pode-se obter os valores com mais algarismos. Registra-se aqui valores mais precisos para o primeiro número de onda $k_1 = 1,505618731\pi/l$, bem como o valor da primeira

frequência $\omega_1 = 2,266887764 \sqrt{\frac{EI \pi^2}{\rho l^2}}$.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A viga engastada foi transformada em um sistema de massas e molas permitindo a obtenção da Lagrangiana do sistema para graus de liberdade. Como exemplo de aplicação, foram obtidas as duas primeiras frequências normais de vibração considerando o sistema com graus de liberdade nas Equações 6 e 7. Também consideramos o caso em que se observa a concordância dos dois resultados se considerarmos um número finito de, mas suficientemente grande. A mesma técnica foi utilizada para decompor a viga em molas de torção e obtida sua Lagrangiana. Da equação de movimento encontrada, conseguimos a equação que descreve a deflexão da viga na Equação 12. Da mesma equação, também obtemos as frequências dos modos normais da viga biengastada pela mecânica, cujos valores explícitos são encontrados na Equação 17.

CONCLUSÃO

Utilizando um modelo teórico e com o auxílio do Formalismo Lagrangiano, no presente trabalho foram determinadas as frequências naturais e a deflexão de uma viga biengastada. No entanto percebemos que quanto maior um número de graus de liberdade teremos um valor mais aproximado do esperado. O software MuPAD incluído no MATLAB, através de simulação computacional, facilitou a visualização do comportamento do sistema e dos modos normais de vibração encontrados. A solução usando o Formalismo Lagrangiano foi satisfatória visto que a uma dificuldade em analisar uma estrutura hiperestática usando a mecânica newtoniana.

REFERÊNCIAS

- Figueiredo, F. B. et al. Análise computacional dos modos e frequências naturais de vibração de uma viga engastada-livre. In: Colloquium Exactarum. ISSN: 2178-8332. [S.l.: s.n.]. v. 6, n. 1, p.114–127, 2014.
- Neto, J. B. Mecânica Newtoniana, Lagrangiana e Hamiltoniana. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2004.
- Schmitz, K. S. S. T. L. Mechanical Vibrations: Modeling and Measurement. 2nd ed.[S.l.]: Springer International Publishing; Springer, Nova York, pp 176-178. ISBN 978-3-030-52343-5,978-3-030-52344-2, 2021.
- Selli, Romar. Análise experimental de estruturas usando extensômetros elétricos. Repositório Institucional UNISC, Rio Grande do Sul, 2015.
- Técnicas, A. B. de N. (2007) ABNT NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - procedimento. ISBN 9788507004684, 2007.
- Venceslau, S. M. M. et al. Modelagem matemática de sistemas vibratórios com aplicação de autovalores. Repositório Institucional UFES, Sergipe, 2015.