

## ANÁLISE TRANSIENTE NÃO LINEAR DE TRELIÇA COM MODELOS DE DANO E ELASTOPLASTICIDADE VIA MEF

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA<sup>1</sup>, TIAGO TADEU AMARAL DE OLIVEIRA<sup>2</sup>, LEONARDO ARAÚJO MARCOLIN<sup>3</sup>

<sup>1</sup>Dr. em Métodos Numéricos para Engenharia, UTFPR, Apucarana-PR, lasouza@utfpr.edu.br

<sup>2</sup>Me. em Engenharia Civil, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PCV, UEM, Maringá-PR, tiagotadeu03@gmail.com

<sup>3</sup>Me. em Engenharia de Estruturas, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil - PCV, UEM, Maringá-PR, eng.marcolin@gmail.com

Apresentado no  
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC  
06 a 09 de outubro de 2025

**RESUMO:** Este trabalho apresenta um modelo numérico-computacional para a análise transiente não linear de treliças planas, utilizando um método de integração direta da família de Newmark associado ao esquema iterativo de Newton-Raphson padrão. Dois modelos constitutivos são implementados: um baseado na Mecânica do Dano e outro na Elastoplasticidade com encruamento linear. A formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos é utilizada para considerar grandes deslocamentos e rotações, com inclusão do amortecimento estrutural de Rayleigh. Um problema dinâmico de uma estrutura com três barras biarticuladas é estudado com o programa livre Scilab. Os resultados numéricos demonstraram que o modelo elastoplástico apresentou maiores deslocamentos devido à resistência adicional após o escoamento, enquanto o modelo de dano promoveu maior rigidez estrutural. Na análise transiente do sistema estrutural, observou-se que, após o pico de deslocamento, o dano e a deformação plástica permaneceram constantes devido à dissipação de energia por amortecimento. Para o exemplo analisado, a introdução da não linearidade geométrica reduziu os deslocamentos, evidenciando sua importância em análises realistas. O estudo reforça a relevância da escolha adequada dos modelos constitutivos e das condições dinâmicas na análise de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos.

**PALAVRAS-CHAVE:** Análise dinâmica não linear, amortecimento de Rayleigh, não linearidade física, formulação corrotacional.

### NONLINEAR TRANSIENT ANALYSIS OF TRUSS USING ELASTOPLASTICITY AND DAMAGE MODELS VIA FEM

**ABSTRACT:** This work presents a numerical-computational model for the nonlinear transient analysis of planar trusses, using a direct integration method from the Newmark family associated with the standard Newton-Raphson iterative scheme. Two constitutive models are implemented: one based on Damage Mechanics and the other on Elastoplasticity with linear hardening. The co-rotational formulation of the Finite Element Method is employed to account for large displacements and rotations, including Rayleigh structural damping. A dynamic problem involving a structure with three pin-jointed bars is analyzed using the open-source software Scilab. The numerical results show that the elastoplastic model exhibits greater displacements due to additional resistance after yielding, whereas the damage model results in greater structural stiffness. In the transient analysis of the structural system, it was observed that after the peak displacement, damage and plastic deformation remained constant due to energy dissipation through damping. For the analyzed example, the introduction of geometric nonlinearity reduced displacements, highlighting its importance in realistic analyses. The study emphasizes the relevance of properly selecting constitutive models and dynamic conditions when analyzing structures subjected to large displacements.

**KEYWORDS:** Nonlinear dynamic analysis, Rayleigh damping, physical nonlinearity, co-rotational formulation.

## INTRODUÇÃO

As treliças são muito usadas na engenharia, pois conseguem cobrir grandes distâncias com pouco peso e são construídas rapidamente. É comum vê-las em pontes, telhados, torres de transmissão, estádios, terminais, indústrias e plataformas marítimas. Para prever com maior precisão o comportamento de estruturas treliçadas, a não linearidade geométrica, a não linearidade material, a instabilidade por flambagem, o escoamento e a ruptura devem ser considerados (Pascon, 2025). A análise de resposta dinâmica é fundamental no processo de projeto de sistemas estruturais em geral e, notadamente, de estruturas treliçadas que estão sujeitas a carregamentos dinâmicos. Em vários casos, as vibrações podem causar grandes deslocamentos e tensões perigosas durante o projeto. Isso pode acontecer quando a frequência de vibração induzida pelo carregamento aplicado é igual à da vibração livre (fenômeno conhecido como ressonância) ou quando a magnitude da carga dinâmica é significativa (Dao; Thi, 2023).

Neste contexto, este artigo apresenta um modelo numérico-computacional para a análise transiente não linear de treliças planas, com formulação implementada no ambiente Scilab (Scilab, 2025). O método de integração direta da família de Newmark (Liu; Li; Zhao, 2013), associado ao esquema iterativo de Newton-Raphson padrão, é utilizado para a resolução da equação do movimento. A formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos - MEF (Yaw, 2009), adequada para lidar com grandes rotações e deslocamentos, é empregada para a discretização da estrutura. Dois modelos constitutivos distintos são adotados: um baseado na Mecânica do Dano (Manzoli; Oliver; Ruiz, 1998), com degradação progressiva e irreversível da rigidez do material; e outro na Elastoplasticidade com encruamento linear (Yaw, 2017), capaz de representar a evolução da deformação plástica com endurecimento. Com relação ao amortecimento, utiliza-se o modelo de Rayleigh. A matriz de amortecimento é expressa como uma combinação linear das matrizes de massa e de rigidez da estrutura, utilizando coeficientes obtidos em função de duas frequências naturais distintas da estrutura e da taxa de amortecimento. Além da simplicidade, a vantagem do amortecimento de Rayleigh é fornecer a matriz de amortecimento global com as mesmas características de esparsidade que a matriz de rigidez (Soriano, 2014). A análise numérica de uma estrutura composta por três barras biarticuladas foi realizada com o objetivo de avaliar a resposta dinâmica para diferentes condições de modelagem: com e sem amortecimento estrutural, e considerando apenas a não linearidade física (NLF) ou ambas as não linearidades física e geométrica (NLFG). Os resultados numéricos demonstram que o modelo elastoplástico apresentou maiores deslocamentos, devido à capacidade do material de resistir além do limite de escoamento. Por outro lado, o modelo de dano gerou respostas mais rígidas, com estabilização do parâmetro de dano após o pico de deslocamento, como consequência da ação do amortecimento de Rayleigh.

## MATERIAL E MÉTODOS

As equações da dinâmica estrutural são expressas na forma de (Kim, 2020):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1)$$

em que  $\mathbf{M}$  é a matriz de massa,  $\mathbf{C}$  é a matriz de amortecimento,  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez,  $\ddot{\mathbf{u}}$  é o vetor aceleração,  $\dot{\mathbf{u}}$  é o vetor velocidade,  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamento e  $\mathbf{F}_{\text{ext}}$  é o vetor de forças externas. Uma abordagem amplamente utilizada para resolver a Equação (1) é a integração direta no tempo, na qual as relações de equilíbrio são satisfeitas em pontos discretos de tempo, separados por  $\Delta t$ . A solução avança no tempo assumindo variações temporais de deslocamentos, velocidades e acelerações dentro do intervalo de tempo  $\Delta t$ . As suposições utilizadas resultam em um algoritmo específico e afetam diretamente a estabilidade e a precisão do procedimento (Bathe; Baig, 2005). A equação do movimento dada em Equação (1) é solucionada pelo Método da Aceleração Regressiva (Liu; Li; Zhao, 2013) pertencente à família de Newmark. Esse método se destaca como um esquema implícito de passo único, com precisão de segunda ordem e incondicionalmente estável. Utilizando iterações de Newton-Raphson padrão, apenas um conjunto de equações implícitas precisa ser resolvido nos pontos discretos de tempo de interesse, contando com uma matriz de rigidez efetiva simétrica e um vetor de carga efetiva. Além disso, esse método exige o mesmo esforço computacional da regra trapezoidal, sem o uso de variáveis

adicionais ou parâmetros artificiais. Para descrever o comportamento do material segundo a Mecânica do Dano, utiliza-se o modelo proposto por Manzoli, Oliver e Ruiz (1998). Para o caso de um elemento unidimensional submetido a uma força axial, a tensão efetiva  $\bar{\sigma}$  é expressa por:

$$\bar{\sigma} = E_0 \varepsilon \quad (2)$$

na qual  $E_0$  é o módulo de elasticidade não danificado do material e  $\varepsilon$  é a deformação específica. O limite de dano inicial  $r_0$  é uma propriedade do material e pode ser relacionado à tensão de escoamento  $\sigma_Y$  por:

$$r_0 = \frac{\sigma_Y}{\sqrt{E_0}} \quad (3)$$

Define-se a norma da tensão efetiva  $\tau(\bar{\sigma})$  por:

$$\tau(\bar{\sigma}) = \frac{\sqrt{\bar{\sigma}^2}}{\sqrt{E_0}} = \frac{\sqrt{E_0^2 \varepsilon^2}}{\sqrt{E_0}} = \sqrt{E_0} \varepsilon \quad (4)$$

O critério de degradação  $f(\bar{\sigma})$  é dado pela equação:

$$f(\bar{\sigma}) = \tau(\bar{\sigma}) - r = \sqrt{E_0} \varepsilon - r \leq 0 \quad (5)$$

A partir das relações de Kuhn - Tucker, o limite de dano  $r$  é dado pelo máximo valor da variável  $\tau$  durante o processo de carregamento, tal que:

$$r = \text{máx}(r, \tau) \quad (6)$$

A tensão normal  $\sigma$  no material é obtida por:

$$\sigma = (1 - d)E_0 \varepsilon \quad (7)$$

na qual o dano  $d$  é um escalar escrito em função do módulo  $H$  e do limite de dano  $r$  por:

$$d = \frac{r - r_0}{r(1 + H)} \quad (8)$$

A formulação do modelo Elastoplástico é obtida do trabalho de Yaw (2017). Modelos constitutivos elastoplásticos consideram que depois de atingida a tensão de escoamento ( $\sigma_Y$ ) do material, toda tensão aplicada provocará o surgimento de deformações irreversíveis em um dado corpo. A deformação específica total ( $\varepsilon$ ) pode ser dividida em duas parcelas - deformação elástica ( $\varepsilon_e$ ) e deformação plástica ( $\varepsilon_p$ ):

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (9)$$

O valor da tensão normal  $\sigma$  é obtido pela expressão:

$$\sigma = E_0 \varepsilon_e = E_0 (\varepsilon - \varepsilon_p), \quad (10)$$

A função que descreve o critério de escoamento  $f(\sigma)$  é:

$$f(\sigma) = |\sigma| - G(\alpha), \quad (11)$$

em que  $G(\alpha)$  é uma função que descreve a variação da tensão de escoamento  $\sigma_Y$ , cuja expressão para o caso de encruamento linear é:

$$G(\alpha) = \sigma_Y + B\alpha \quad (12)$$

sendo  $\alpha$  a Variável de Endurecimento e  $B$  o Módulo Plástico. No caso do encruamento linear, o módulo tangente elastoplástico  $E$  é dado por:

$$E = \frac{E_0 B}{E_0 + B} \quad (13)$$

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

Considere o problema adimensional de uma estrutura com três barras biarticuladas sujeita a uma força  $P = 10$ , cujo modelo estrutural está ilustrado na Figura 1a. Esta estrutura foi analisada estaticamente por Silva e Lima Junior (2016) considerando o comportamento constitutivo elastoplástico com encruamento positivo. As barras possuem módulo de elasticidade  $E_0 = 1000$ , tensão de escoamento  $\sigma_Y = 4$ , Módulo Plástico  $B = 111$ , área da seção transversal  $A = 1,0$  e massa específica  $\rho = 1,0 \times 10^{-5}$ . Para o modelo de dano, considera-se o módulo  $H = B/E_0 = 0,111$ . Na Figura 1b aparecem as trajetórias de equilíbrio (carregamento – descarregamento) com os modelos de dano e elastoplástico, obtidas com o método de Newton-Raphson com controle de carga constante. A Figura 2 apresenta os resultados da

análise transiente do deslocamento vertical ao longo do tempo para os dois modelos constitutivos (elastoplástico e de dano), sob diferentes condições: com e sem amortecimento, e com diferentes tipos de não linearidade (não linearidade física - NLF e não linearidade física e geométrica -NLFG). As curvas são obtidas para o tempo total  $t_{m\acute{a}x} = 1,5$  s e incremento de tempo  $\Delta t = 0,001$  s. Para o cálculo da matriz de amortecimento  $\mathbf{C}$  de Rayleigh (Soriano, 2014), consideram-se as frequências naturais  $\omega_1 = 54,772256$  rad/s e  $\omega_2 = 70,710678$  rad/s e a taxa de amortecimento  $\zeta = 0,05$ . Adota-se a matriz de massa condensada (ou concentrada) nas análises. Na formulação corrotacional do MEF, emprega-se a deformação de engenharia. A evolução do dano e a evolução das deformações plásticas para cada umas das barras ao longo do tempo considerando a NLF e o amortecimento são apresentadas na Figura 3.

Figura 1. a) Modelo estrutural da estrutura com três barras; e b) trajetórias de equilíbrio (análise estática não linear física com carregamento e descarregamento).

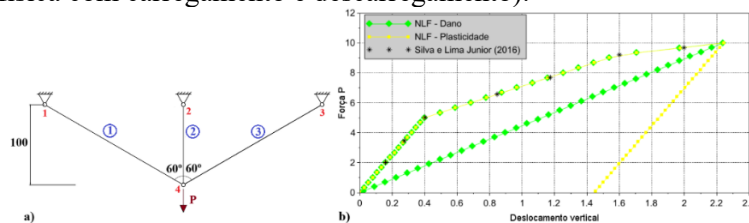


Figura 2. Análise transiente: a) com amortecimento de Rayleigh; e b) sem amortecimento.

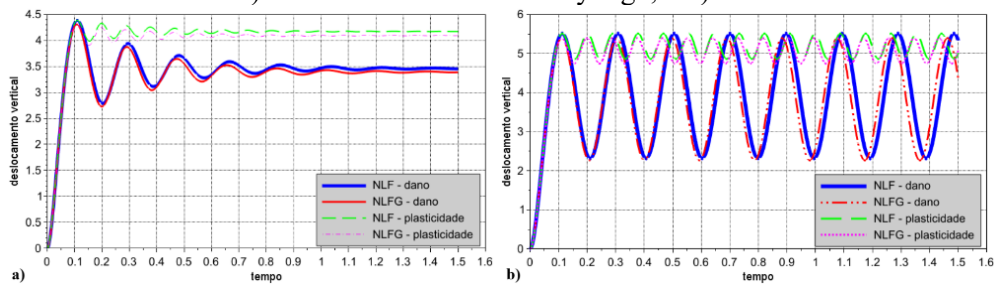
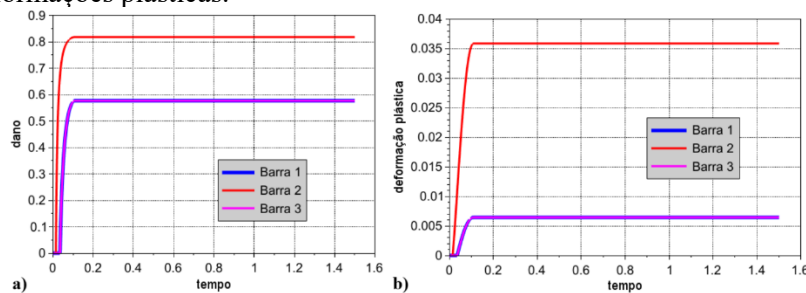


Figura 3. Análise transiente considerando a NLF e o amortecimento: a) evolução do dano; e b) evolução das deformações plásticas.



Na análise com o amortecimento de Rayleigh (Figura 2a), ocorre a dissipação de energia e a redução gradual das amplitudes. Diferentemente, para a análise sem o amortecimento (Figura 2b), a energia se conserva e as vibrações persistem. A inclusão da não linearidade geométrica na análise reduz os deslocamentos, refletindo uma resposta mais realista em grandes deslocamentos. No que diz respeito ao modelo de dano, vê-se na Figura 3a que o dano em cada barra se estabiliza após o instante de máxima amplitude de deslocamento (nas barras '1' e '3' o dano  $d$  é igual a 0,5770173 e na barra '2'  $d$  é igual a 0,8180078). Isso ocorre porque o modelo de dano empregado é irreversível e depende da deformação máxima atingida durante o processo. Com o amortecimento estrutural de Rayleigh, as amplitudes das vibrações decaem com o tempo, não sendo mais suficiente para ultrapassar o limiar de ativação do dano.

Assim, não há mais degradação adicional da rigidez do material, resultando em valores constantes do parâmetro de dano a partir desse ponto. Com relação ao modelo elastoplástico com encruamento positivo, uma vez que a tensão normal na barra atinge o limite de escoamento, o material entra no regime plástico e acumula deformação plástica. Com a redução da amplitude das vibrações, a tensão interna nas barras diminui, e o sistema não atinge mais o critério de escoamento para continuar acumulando deformações plásticas. Desse modo, conforme a Figura 3b, a deformação plástica permanece constante nas barras (nas barras '1' e '3' a deformação  $\epsilon_p$  é igual a 0,0064303 e na barra '2'  $\epsilon_p$  é igual a 0,0358802) a partir do instante correspondente ao pico de deslocamento, representando um comportamento fisicamente coerente de histerese com amortecimento.

## CONCLUSÃO

Os resultados das análises transientes evidenciaram diferenças significativas entre os modelos constitutivos adotados. O modelo elastoplástico com encruamento apresentou maiores deslocamentos verticais, devido à capacidade do material de suportar esforços adicionais após o escoamento. Já o modelo de dano resultou em respostas mais rígidas, com degradação progressiva da rigidez. Observou-se também que, após a amplitude máxima de deslocamento, tanto a deformação plástica quanto o dano permaneceram constantes, resultado do efeito dissipativo do amortecimento estrutural. A inclusão da não linearidade geométrica reduziu os deslocamentos, tornando a resposta estrutural mais realista em regime de grandes deslocamentos. Esses resultados demonstram a importância da escolha adequada do modelo constitutivo e da consideração dos efeitos geométricos e dissipativos na simulação dinâmica de estruturas.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PCV pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- Bathe, K.-J.; Baig, M. M. I. On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics. *Computers & Structures*, v. 83, n. 31-32, p. 2513-2524, 2005.
- Dao, N. T.; Thi, T. V. T. Hybrid finite element method in nonlinear dynamic analysis of trusses. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 23, n. 20, p. 2450195, 2023.
- Pascon, J. P. Large deformation analysis of trusses considering ductile damage, mixed hardening, strain-rate dependence and thermal effects. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 47, n. 5, p. 1-22, 2025.
- Scilab, versão 2025.1.0. Dassault Systèmes, 2025.
- Silva, T. B.; Lima Junior, E. T. Confiabilidade estrutural aplicada a modelos numéricos de treliça plana em regime elastoplástico. *Ciência & Engenharia (Science & Engineering Journal)*, v. 25, n. 2, p. 87 – 93, 2016.
- Soriano, H. L. *Introdução à dinâmica das estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
- Liu, T. Y.; Li, Q. B.; Zhao, C. B. An efficient time-integration method for nonlinear dynamic analysis of solids and structures. *Science China Physics, Mechanics and Astronomy*, v. 56, n. 4, p. 798-804, 2013.
- Yaw, L. L. *2D Co-rotational Truss Formulation*. Walla Walla University, 2009.
- Yaw, L. L. *Nonlinear Static - 1D Plasticity - Isotropic and Kinematic Hardening*. Walla Walla University, 2017.