

MÉTODO DE NEWMARK ASSOCIADO AO ESQUEMA ITERATIVO DE POTRA-PTÁK PARA ANÁLISE TRANSIENTE NÃO LINEAR

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA¹

¹Dr. em Métodos Numéricos para Engenharia, UTFPR, Apucarana-PR, lasouza@utfpr.edu.br

Apresentado no
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC
06 a 09 de outubro de 2025

RESUMO: Este artigo objetivou apresentar o pseudocódigo do método de integração direta de Newmark associado ao método de Potra-Pták para a análise não linear dinâmica de estruturas. Para validar o programa elaborado no ambiente Scilab, as soluções numéricas das análises estática e dinâmica de uma treliça plana com comportamento geometricamente não linear foram apresentadas. A estrutura foi discretizada por meio da formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos. O amortecimento estrutural com a aproximação de Rayleigh também foi considerado. Os resultados numéricos da análise transiente demonstraram que a resposta obtida com o método de Potra-Pták exigiu um número total de interações acumuladas menor em comparação com o método padrão de Newton-Raphson, resultando em um tempo de processamento reduzido.

PALAVRAS-CHAVE: análise transiente, não linearidade geométrica, método de Potra-Pták, treliça plana.

NEWMARK METHOD ASSOCIATED WITH THE POTRA-PTÁK ITERATIVE SCHEME FOR NONLINEAR TRANSIENT ANALYSIS

ABSTRACT: This article aims to present the pseudocode for the Newmark direct integration method coupled with the Potra-Pták method for the nonlinear dynamic analysis of structures. To validate the program developed in the Scilab environment, numerical solutions from the static and dynamic analyses of a planar truss with geometrically nonlinear behavior are presented. The structure was discretized using the co-rotational formulation of the Finite Element Method. Structural damping with the Rayleigh approximation was also considered. The numerical results from the transient analysis demonstrated that the response obtained with the Potra-Pták method required a lower total number of accumulated iterations compared to the standard Newton-Raphson method, resulting in reduced processing time.

KEYWORDS: transient analysis, geometric nonlinearity, Potra-Pták method, planar truss.

INTRODUÇÃO

Estruturas treliçadas são amplamente empregadas na engenharia devido à sua capacidade de cobrir grandes vãos com peso relativamente baixo e ao seu curto período de construção, como geralmente observado em pontes, telhados, torres de transmissão, estádios, terminais, instalações industriais e plataformas *offshore* (Pascon, 2025). Essas estruturas podem estar sujeitas a grandes deflexões e rotações quando submetidas a terremotos, cargas de vento, entre outras, induzindo a não linearidade geométrica na resposta dinâmica.

Nas últimas décadas, esquemas de integração temporal direta têm sido propostos e empregados para a solução das equações de elementos finitos dependentes do tempo. Esses esquemas de integração são utilizados em análises transientes da resposta dinâmica de estruturas e podem ser classificados em técnicas explícitas e implícitas (Noh; Bathe, 2019). Métodos implícitos podem ser projetados para possuir estabilidade incondicional e dissipação numérica controlável, mas eles exigem fatorações de matriz. Por outro lado, métodos explícitos são apenas condicionalmente estáveis, mas não exigem fatorações de matriz se a matriz de massa for diagonal (Kim, 2020). Considerando o número massivo de componentes e a complexidade das estruturas modernas combinadas com a complicada motivação

dinâmica, um procedimento estável, eficiente, robusto e simples para a resposta dinâmica não linear com grandes deformações ainda é desejado (Chen et al., 2022).

Nesse contexto, um pseudocódigo para a análise não linear transiente é proposto combinando o método de integração implícito de Newmark (Regra Trapezoidal) com o esquema de Potra-Pták (Souza et al., 2021) cuja iteração tem dois passos e ordem de convergência cúbica. Um código computacional para a análise transiente de treliças planas com comportamento geometricamente não linear é elaborado com o programa livre Scilab, versão 2025.1.0 (Scilab, 2025). A estrutura é discretizada por meio da formulação corrotacional do Método dos Elementos Finitos (MEF) (Yaw, 2009). O amortecimento de Rayleigh e a matriz de massa condensada (ou concentrada) são utilizados na análise dinâmica. A resposta dinâmica de um problema de treliça com dez barras é obtida com o algoritmo de solução proposto com menos iterações até a convergência e menor tempo de processamento (tempo de CPU), em contraste com o procedimento padrão de Newton-Raphson.

A formulação corrotacional do MEF decompõe a configuração de referência em duas partes distintas, a saber: a primeira é a configuração inicial indeformada, que permanece fixa para cada elemento finito da malha quando o sólido está em repouso; e a segunda é a configuração corrotacionada, que se move solidariamente com cada elemento, representando o movimento de corpo rígido do elemento em relação à configuração indeformada. A deformação é, então, quantificada medindo-se o movimento deformacional da configuração deformada em relação à configuração corrotacionada (Souza; Silva, 2022).

MATERIAL E MÉTODOS

O sistema de equações da dinâmica estrutural é expresso na forma de (Kim, 2020):

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{u}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{u}} + \mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{F}_{\text{ext}} \quad (1)$$

em que \mathbf{M} é a matriz de massa, \mathbf{C} é a matriz de amortecimento, \mathbf{K} é a matriz de rigidez, $\ddot{\mathbf{u}}$ é o vetor aceleração, $\dot{\mathbf{u}}$ é o vetor velocidade, \mathbf{u} é o vetor de deslocamento e \mathbf{F}_{ext} é o vetor de forças externas. Uma abordagem amplamente utilizada para resolver a Equação (1) é a integração direta no tempo, na qual as relações de equilíbrio são satisfeitas em pontos discretos de tempo separados pelo intervalo de tempo Δt . A solução avança no tempo assumindo variações temporais de deslocamentos, velocidades e acelerações dentro do intervalo Δt . As suposições utilizadas resultam em um algoritmo específico e afetam diretamente a estabilidade e a precisão do procedimento (Bathe; Baig, 2005).

O método implícito de integração de Newmark consiste em expressar os vetores de deslocamentos e de velocidade em aproximações por diferenças finitas no domínio do tempo. Para o instante de tempo atual ($t + \Delta t$), as expressões de Newmark para o deslocamento \mathbf{u} e a velocidade $\dot{\mathbf{u}}$ são dadas por, respectivamente (Bathe; Baig, 2005):

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{u} = {}^t\mathbf{u} + \Delta t \quad {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t^2 \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \quad {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \beta \quad {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \right] \quad (2)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{u}} = {}^t\dot{\mathbf{u}} + \Delta t (1 - \gamma) \quad {}^t\ddot{\mathbf{u}} + \Delta t \gamma \quad {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{u}} \quad (3)$$

em que β e γ são constantes referentes ao método de Newmark. Com a escolha de $\beta = 1/4$ e $\gamma = 1/2$, o método de Newmark se torna a famosa Regra Trapezoidal, que é incondicionalmente estável e de segunda ordem de precisão.

Os autores Potra e Pták (1984) desenvolveram um método iterativo de dois passos com ordem de convergência cúbica baseado no método de Newton-Raphson. Esse método é do tipo $\mathbf{x}^{(k)} = \Phi(\mathbf{x}^{(k-1)})$, o qual fornece uma sequência de vetores $\{\mathbf{x}^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$, em que o índice k é a iteração e o vetor $\mathbf{x}^{(k)}$ é a aproximação da solução na k -ésima iteração. A partir de uma estimativa inicial $\mathbf{x}^{(0)}$, essa sequência poderá convergir ou divergir para uma i -ésima raiz \mathbf{x}^{*i} do sistema de equações de equações não lineares $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$. O esquema iterativo desse método adaptado para a análise estática com controle de carga constante num procedimento incremental é descrito pelas seguintes equações (Souza; Castelani; Shirabayashi, 2021):

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} - [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}) \quad (4)$$

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} - [\mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})]^{-1} [\mathbf{g}(\mathbf{u}^{(k-1)}) + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)})] \quad (5)$$

Neste trabalho, o método de Potra-Pták é utilizado para a correção da solução predita no ciclo iterativo juntamente com o método implícito Newmark para a análise não linear dinâmica. Na Figura 1 é apresentado o pseudocódigo desse esquema iterativo. As matrizes de massa (\mathbf{M}) e de amortecimento (\mathbf{C}) permanecem constantes ao longo dos passos de tempo.

Figura 1. Técnica de integração direta de Newmark associado ao método de Potra-Pták.

| | |
|---|--|
| <p>Entrada: ${}^0\mathbf{u}$, ${}^0\dot{\mathbf{u}}$, Δt, $t_{\text{máx}}$, $k_{\text{máx}}$, β e γ Saída: \mathbf{u}, $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$, t_{proc}, k_{total}, $k_{\text{médio}}$</p> <ol style="list-style-type: none"> 1. tempo $\leftarrow t_{\text{máx}}/\Delta t$ 2. $k_{\text{total}} \leftarrow 0$ 3. tic (inicia o cronômetro) 4. ${}^0\ddot{\mathbf{u}} \leftarrow \mathbf{M}^{-1} [\mathbf{F}_{\text{ext}} - \mathbf{F}_{\text{int}}({}^0\mathbf{u}) - \mathbf{C} {}^0\dot{\mathbf{u}}]$ 5. Para np $\leftarrow 1, \dots$, tempo faça 6. $\mathbf{q}_s \leftarrow \frac{t_u}{\beta \Delta t^2} + \frac{t_{\dot{u}}}{\beta \Delta t} + \left(\frac{1}{2\beta} - 1\right) t_{\ddot{u}}$ 7. $\mathbf{r}_s \leftarrow t_{\dot{u}} + \Delta t (1 - \gamma) t_{\ddot{u}}$ 8. $\mathbf{a}_0 \leftarrow \mathbf{M} \mathbf{q}_s$ 9. $\mathbf{a}_1 \leftarrow \mathbf{C} \mathbf{r}_s$ 10. $\mathbf{a}_2 \leftarrow \gamma \Delta t \mathbf{C} \mathbf{q}_s$ 11. $k \leftarrow 1$ 12. Enquanto $k < k_{\text{máx}}$ faça 13. $\mathbf{K}_{\text{ef}}^{(k)} \leftarrow \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)}) + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C}$ 14. $\mathbf{F}_{\text{ef}}^{(k)} \leftarrow \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u}^{(k-1)}) + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{u}^{(k-1)} - \mathbf{a}_0 + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \mathbf{u}^{(k-1)} + \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_{\text{ext}}$ 15. $\delta \mathbf{u}_1^{(k)} \leftarrow -[\mathbf{K}_{\text{ef}}^{(k)}]^{-1} \mathbf{F}_{\text{ef}}^{(k)}$ (passo 1) | <ol style="list-style-type: none"> 16. $\mathbf{y}^{(k)} \leftarrow \mathbf{u}^{(k-1)} + \delta \mathbf{u}_1^{(k)}$ 17. $\mathbf{F}_{\text{efy}}^{(k)} \leftarrow \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{y}^{(k)}) + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M} \mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{a}_0 + \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{C} \mathbf{y}^{(k)} + \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 - \mathbf{F}_{\text{ext}}$ 18. $\delta \mathbf{u}_2^{(k)} \leftarrow -[\mathbf{K}_{\text{ef}}^{(k)}]^{-1} \mathbf{F}_{\text{efy}}^{(k)}$ (passo 2) 19. $\mathbf{u}^{(k)} \leftarrow \mathbf{y}^{(k)} + \delta \mathbf{u}_2^{(k)}$ 20. $\dot{\mathbf{u}}^{(k)} \leftarrow \frac{\gamma}{\beta \Delta t} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{r}_s - \gamma \Delta t \mathbf{q}_s$ 21. $\ddot{\mathbf{u}}^{(k)} \leftarrow \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{u}^{(k)} - \mathbf{q}_s$ 22. Se $\ \delta \mathbf{u}_2^{(k)}\ \leq \text{tol} \ \mathbf{u}^{(k)}\$ ou $\ \mathbf{F}_{\text{efy}}^{(k)}\ \leq \text{tol} \ \mathbf{F}_{\text{ext}}\$ então 23. Sair do Enquanto 24. Fim-Se 25. $k \leftarrow k + 1$ 26. Fim-Enquanto 27. $k_{\text{total}} \leftarrow k_{\text{total}} + k$ 28. Fim-Para 29. $k_{\text{médio}} \leftarrow k_{\text{total}}/\text{np}$ 30. $t_{\text{proc}} \leftarrow \text{toc}$ (lê o cronômetro) |
|---|--|

Ao se considerar a técnica de integração de Newmark associado ao método iterativo de Newton-Raphson, as linhas 17 e 18 não são executadas no pseudocódigo da Figura 1, uma vez que $\delta \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$. Além disso, o critério de convergência para a correção da solução predita (linhas 22, 23 e 24) fica: Se $\|\delta \mathbf{u}_1^{(k)}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{u}^{(k)}\|$ ou $\|\mathbf{F}_{\text{ef}}^{(k)}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{F}_{\text{ext}}\|$, então Sair do Enquanto, Fim-Se.

Os dados de entrada no pseudocódigo são: o vetor de deslocamentos nodais ${}^0\mathbf{u}$; o vetor de velocidade ${}^0\dot{\mathbf{u}}$; o incremento de tempo Δt ; o tempo máximo $t_{\text{máx}}$; o número máximo de iterações em cada passo de tempo $k_{\text{máx}}$; a tolerância tol para o critério de convergência; e os parâmetros β e γ . As saídas do mesmo são: os vetores \mathbf{u} , $\dot{\mathbf{u}}$, $\ddot{\mathbf{u}}$; o número total de iterações acumuladas até a convergência para a solução (k_{total}); número médio de iterações por passo de tempo ($k_{\text{médio}}$); e o tempo de processamento t_{proc} em segundos.

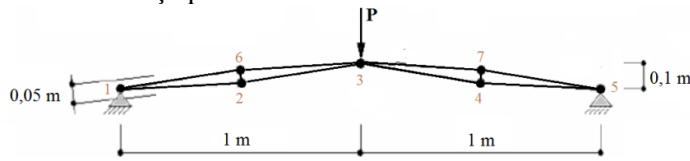
RESULTADOS E DISCUSSÃO

As simulações são efetuadas em um *notebook* com processador 12th Gen Intel(R) Core(TM) i7-1255U 1.70 GHz e memória RAM 16 GB. Para a obtenção dos tempos totais de processamento (tempo de CPU) em segundos, o programa é executado três vezes para cada análise não linear, sendo considerado o menor dos valores numéricos obtidos.

Seja a treliça plana com dez barras e sete nós ilustrada na Figura 2, submetida a uma força constante $P(t) = 2,5 \text{ kN}$. As barras têm rigidez axial $EA = 5,0 \times 10^3 \text{ kN}$ e massa específica $\rho = 2768 \text{ kg/m}^3$. Greco e Venturini (2006) fizeram a análise estática dessa estrutura considerando a não linearidade geométrica. As análises estática e dinâmica são efetuadas com a medida de deformação específica de Engenharia. Considera-se o amortecimento de Rayleigh que é uma combinação linear entre a massa e a rigidez, sendo a matriz de amortecimento \mathbf{C} dada por (Soriano, 2014):

$$\mathbf{C} = \mu_0 \mathbf{M} + \mu_1 \mathbf{K} = 53,080517 \mathbf{M} + 0,0001872 \mathbf{K} \quad (6)$$

Figura 2. Modelo estrutural da treliça plana.



Para o cálculo dos parâmetros de Rayleigh μ_0 e μ_1 , são adotadas as duas primeiras frequências naturais ($\omega_1 = 491,77666$ rad/s e $\omega_2 = 576,56248$ rad/s) e a taxa de amortecimento $\zeta = 0,1$. As frequências naturais são determinadas com a função *spec* do Scilab (Souza, 2024). Na Figura 3a é apresentada a trajetória de equilíbrio (deslocamento vertical no centro *versus* força P) obtida da análise estática, havendo boa concordância com os pontos de equilíbrio obtidos por Greco e Venturini (2006). Adota-se a matriz de massa condensada ou concentrada elementar (\mathbf{M}_e) que é dada por (Soriano, 2014):

$$\mathbf{M}_e = \frac{\rho L}{2} \text{diag}[1 \ 1 \ 1 \ 1] \quad (7)$$

na qual o símbolo *diag*[...] representa uma matriz diagonal com os coeficientes diagonais mostrados (dentro dos colchetes). A curva tempo – deslocamento obtida da análise dinâmica transiente para o tempo total $t_{\text{máx}} = 0,15$ s aparece na Figura 3b, sendo adotados o incremento de tempo $\Delta t = 1,5 \times 10^{-5}$ s e a tolerância $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-7}$. Na Tabela 1 são mostrados os resultados numéricos obtidos com os métodos de Newton-Raphson (NR) e Potra-Pták (PP) da análise transiente.

Figura 3. Treliça plana: a) trajetória de equilíbrio (análise estática); e b) análise dinâmica transiente.

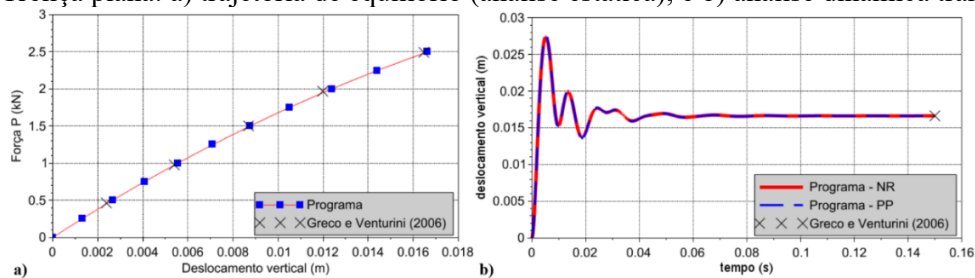


Tabela 1. Resultados numéricos da análise transiente.

| Método de solução | k_{total} | $k_{\text{médio}}$ | $t_{\text{proc}} \text{ (s)}$ |
|---------------------|--------------------|--------------------|-------------------------------|
| Newton-Raphson - NR | 20464 | 2,0464 | 58,308 |
| Potra-Pták - PP | 10240 | 1,0240 | 34,847 |

Como observado na Figura 3b, a solução dinâmica converge para a solução estática ($v \cong 0,01663$ m) quando o amortecimento estrutural é considerado. A presença do amortecimento é fundamental para simular o comportamento real de estruturas sob carregamentos dinâmicos, porque ele dissipa a energia do sistema ao longo do tempo, levando a uma diminuição das amplitudes de vibração até que a estrutura atinja um estado de equilíbrio estático, caso as forças dinâmicas externas se tornem constantes ou nulas. A concordância da solução dinâmica com a estática ao longo do tempo, evidenciada pela Figura 3b, reforça a robustez do modelo numérico e a adequação da aproximação de Rayleigh para esse problema específico.

Embora cada iteração de Potra-Pták possua um custo computacional maior (duas atualizações do vetor de força efetiva - \mathbf{F}_{ef} e \mathbf{F}_{efy} - e a resolução de dois sistemas de equações lineares), o método de Potra-Pták resultou em um menor número total de iterações acumuladas e, conseqüentemente, um tempo de processamento reduzido, em comparação com a iteração de Newton-Raphson. Destaca-se que é utilizada a mesma matriz de rigidez efetiva (\mathbf{K}_{ef}) para a solução dos sistemas de equações lineares no procedimento de Potra-Pták (linhas 15 e 18 no pseudocódigo na Figura 1). Sendo assim, esses sistemas podem ser solucionados via decomposição (por exemplo, decomposição LU), visto que uma única

fatoração no início da iteração é necessária. A seleção do intervalo de tempo (Δt) é um fator crítico que deve ser otimizado para balancear o custo computacional e a precisão numérica. Nesse sentido, o incremento deve ser grande o suficiente para economizar tempo de processamento, mas pequeno o bastante para garantir a precisão da solução.

CONCLUSÃO

Conclui-se que modelo numérico-computacional proposto pode ter aplicação prática na engenharia estrutural. A eficiência demonstrada pelo método de Potra-Pták na redução do tempo de processamento em análises dinâmicas não lineares, sem comprometer a precisão, o torna uma ferramenta valiosa para o projeto e avaliação de estruturas sujeitas a grandes deflexões e rotações, como as observadas em pontes, coberturas, torres de transmissão e plataformas *offshore*. A capacidade de lidar com a não linearidade geométrica de maneira eficiente por meio da formulação corrotacional do MEF permite simulações mais realistas de cenários complexos, como terremotos e cargas de vento, que induzem a não linearidade geométrica na resposta dinâmica. Isso possibilita aos engenheiros otimizar projetos, prever comportamentos estruturais sob condições extremas e garantir a segurança e durabilidade de edificações e infraestruturas.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece à Universidade Tecnológica Federal do Paraná e ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil – PCV pelo apoio no desenvolvimento desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

- Bathe, K.-J.; Baig, M. M. I. On a composite implicit time integration procedure for nonlinear dynamics. *Computers & Structures*, v. 83, n. 31-32, p. 2513-2524, 2005.
- Chen, Z.; He, M.; Tao, Y.; Yang, Y. B. An efficient and robust nonlinear dynamic analysis method for framed structures using the rigid body rule. *International Journal of Structural Stability and Dynamics*, v. 22, n. 03n04, p. 2240001, 2022.
- Greco, M.; Venturin, W. S. Stability analysis of three-dimensional trusses. *Latin American Journal of Solids and Structures*, v. 3, n. 3, p. 325-344, 2006.
- Kim, W. An improved implicit method with dissipation control capability: The simple generalized composite time integration algorithm. *Applied Mathematical Modelling*, v. 81, p. 910-930, 2020.
- Noh, G.; Bathe, K.-J. The Bathe time integration method with controllable spectral radius: The $\rho\infty$ -Bathe method. *Computers & Structures*, v. 212, p. 299-310, 2019.
- Pascon, J. P. Large deformation analysis of trusses considering ductile damage, mixed hardening, strain-rate dependence and thermal effects. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, v. 47, n. 5, p. 1-22, 2025.
- Potra, F.-A.; Pták, V. *Nondiscrete Induction and Iterative Processes*, Research Notes in Mathematics, vol. 103, Pitman, Advanced Publishing Program, Boston, MA, 1984.
- Soriano, H. L. *Introdução à dinâmica das estruturas*. Rio de Janeiro: Elsevier, 2014.
- Scilab, versão 2025.1.0. Dassault Systèmes, 2025.
- Souza, L. A. F. Modelo numérico-computacional para a análise modal e transiente de shear building utilizando o programa Scilab. *Caderno Brasileiro de Ensino de Física*, v. 46, 2024.
- Souza, L. A. F.; Castelani, E. V.; Shirabayashi, W. V. I. Adaptation of the Newton-Raphson and Potra-Pták methods for the solution of nonlinear systems. *Semina: Ciências Exatas e Tecnológicas*, [S. l.], v. 42, n. 1, p. 63-74, 2021.
- Souza, L. A. F.; Silva, E. L. C. Formulações não lineares de elementos finitos de treliça 2D para análise de estruturas com grandes deslocamentos. *The Journal of Engineering and Exact Sciences*, v. 8, n. 7, p. 14600-01e, 2022.
- Yaw, L. L. *2D Co-rotational Truss Formulation*. Walla Walla University, 2009.