ANÁLISE DE ESTRUTURAS *3D* UTILIZANDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS GENERALIZADOS

GUILHERME OLIVEIRA FERRAZ DE PAIVA[1*], FRANCISCO EVANGELISTA JUNIOR[2]

[1]MSc. em Estruturas, Prof. IFPI, Floriano-PI, guilheerme_07@hotmail.com;
[2]PhD. em Engenharia Civil, Prof. ENC, UnB, Brasília-DF, fejr@unb.br

Apresentado no
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC
Palmas/TO – Brasil
17 a 19 de setembro de 2019

RESUMO: Este trabalho teve como objetivo implementar formulações não convencionais do Método dos Elementos Finitos (MEF) aplicadas na análise *3D* de estruturas considerando regime elástico linear. Utilizou-se funções de enriquecimento polinomiais para simulações em domínios tridimensionais de forma a obter melhores aproximações em Problemas de Valor de Contorno (PVC) com soluções suaves, conforme a estratégia do Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG). Foi analisada uma viga em balanço submetida à flexão simples com uma carregamento aplicado na extremidade livre. As simulações foram feitas com quatro malhas utilizando elementos tetraédricos com diferentes graus de refinamento onde foi verificado o deslocamento vertical na extremidade livre. Observou-se uma rápida convergência dos resultados utilizando o MEFG quando se calculou a taxa de erro entre os resultados numéricos e a solução analítica obtida através da teoria de Euler-Bernoulli. Isto demonstrou a capacidade do método em resolver PVC's diversos utilizando malhas grosseiras.
PALAVRAS-CHAVE: Elementos Finitos. MEFG. Enriquecimento. Estruturas. *3D*

ANALYSIS OF *3D* STRUCTURES USING THE GENERALIZED FINITE ELEMENT METHOD

ABSTRACT: The objective of this work was to implement non conventional formulations of the Finite Element Method (FEM) applied in the *3D* analysis of structures considering linear elastic regime. It was used polynomial enrichment functions for simulations in three dimensional domains in order to obtain better approximations in Contour Value Problems (CVP) with soft solutions, according to the strategy of the Generalized Finite Element Method (GFEM). A beam submitted to simple bending with a load applied at the free surface was analyzed. The simulations were done with four meshes using tetrahedral elements with different degrees of refinement where the vertical displacement at the free surface was verified. A rapid convergence of the results was observed using GFEM calculating the error rate between the numerical results and the analytical solution obtained through the Euler-Bernoulli theory. This result demonstrated the ability of the method in solving various CVP's using coarse meshes.
KEYWORDS: Finite Element. GFEM. Enrichment. Structures. 3*D.*

INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta numérica muito utilizada para modelar e analisar o comportamento de estruturas. Diante de Problemas de Valor de Contorno (PVC) específicos, porém, tais como problemas de propagação de trincas, o MEF clássico apresenta dificuldades para modelar o fenômeno analisado (Belytschko e Black, 1999; Duarte *et al.*, 2001). A obtenção de uma solução aproximada mais eficiente, nesses casos, necessitava de um processo de remalhamento constantes, tornando inviável as simulações haja vista o custo computacional envolvido. Além disso, o elevado refinamento de malha, outra condição para tornar mais precisa a resposta, também é um fator que encarece computacionalmente o processo de análise (Paiva *et al*. 2016a; Paiva *et al*. 2018).

O objetivo de ultrapassar as dificuldades apresentadas pelo MEF diante de certos tipos de análises ensejou muitos trabalhos nos últimos anos (Duarte e Oden, 1995; Belytschko e Black, 1999;

Moës *et al*., 1999). A partir dessas pesquisas surgiram métodos numéricos alternativos, tais como o Método dos Elementos Finitos Generalizados (MEFG) (Strouboulis *et al*., 2000a; Strouboulis *et al*., 2000b; Duarte *et al*., 2001; Pereira *et al*., 2009b; Paiva *et al*. 2016a; Paiva *et al*. 2016b; Paiva *et al*. 2018) e o Método dos Elementos Finitos Estendidos (MEFX) (Moës e Belytschko, 2002; Huang *et al*., 2003; Belytschko *et al*., 2009; Gupta e Duarte, 2016; Moreira *et al*. 2016).

MATERIAL E MÉTODOS

O MEF é um método de análise baseado na subdivisão do domínio analisado e possui duas características essenciais: i) divisão de uma geometria complexa em subdomínios mais simples (elementos); ii) os elementos são localmente analisados e, então, são alocados em sua posição global dentro do domínio onde é calculada a solução geral do PVC (Reddy, 2006; Paiva *et al*. 2016a; Paiva *et al*. 2018).

O MEFG, uma variação do MEF convencional, foi inicialmente proposto por Babuška *et al*. (1994) sob a denominação de Método dos Elementos Finitos Especiais. Posteriormente foi mencionado como uma proposta de método sem malha sob a denominação de Método das Nuvens *hp* (Duarte e Oden, 1995). Nesse mesmo ano, Melenk (1995) desenvolveu todo o arcabouço matemático do método. Trata-se de uma forma distinta de geração das funções de forma dos elementos finitos (Pereira et al., 2009a) devido a utilização de funções de forma não convencionais ou "especiais" (Paiva *et al*. 2016a; Paiva *et al*. 2018).

A construção das funções de forma do MEFG ($\varphi_{\alpha i}$), matematicamente, resume-se a uma combinação, em cada nó x_α do domínio, entre as funções de forma padrão do MEF (N_α) e funções especiais $L_{\alpha i}$ chamadas funções de enriquecimento. Sendo $L_{\alpha i} = \{1, L_{\alpha 1}, L_{\alpha 2}, ..., L_{\alpha q}\}$ uma base geradora para um espaço funcional, as funções de forma $\varphi_{\alpha i}$ correspondentes ao nó x_α são construídas da seguinte maneira (Paiva *et al*. 2016a; Paiva *et al*. 2018):

$$\varphi_{\alpha i} = N_\alpha . L_{\alpha i} \qquad \textit{Eq. 1}$$

A aproximação do campo de deslocamentos é obtida a partir da seguinte combinação linear, onde $N_\alpha(x)$ refere-se ao MEF, e $N_\alpha(x).L_\alpha(x)$ refere-se ao MEFG:

$$\tilde{u}(x) = \sum_{\alpha=1}^{n} \mathcal{N}_\alpha(x) . \left\{ a_\alpha + \sum_{i=2}^{q} L_{\alpha i}(x) . b_{\alpha i} \right\} \qquad \textit{Eq. 2}$$

onde a_α são os graus de liberdade da estrutura associados ao nó x_α e $b_{\alpha i}$ os graus de liberdade adicionais correspondentes a cada função de enriquecimento.

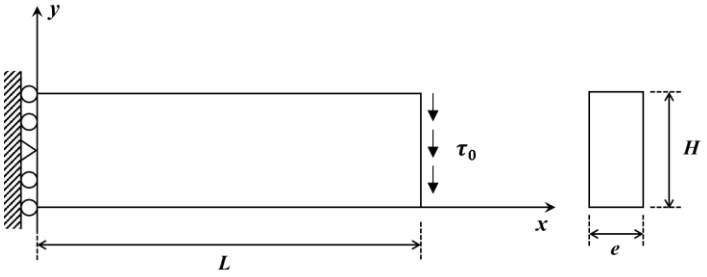
As funções $L_{\alpha i}$ da Eq. 2 podem ser de base polinomial ou não. As funções polinomiais são comumente adotadas devido a relativa facilidade de implementação. Podem ser construídas de forma hierárquica tendo como regra o triângulo de Pascal (Paiva *et al*. 2016a; Paiva *et al*. 2018). As funções utilizadas neste trabalho baseiam-se no seguinte formato:

$$L(m,n,o) = \frac{X^m Y^n Z^o}{h^{m+n+o}} \qquad \textit{Eq. 3}$$

sendo *m, n e o* os expoentes obtidos do triângulo de Pascal e *h* uma variável normalizadora.

Analisou-se uma viga engastada e livre, com carregamento distribuído na face livre, conforme a Figura 1. Dimensões, carregamento, condições de contorno e propriedades mecânicas são as seguinte (em unidades consistentes): L = 10; H = 2; e = 1; Módulo de Elasticidade E = 30 E+06; Coeficiente de Poisson ν = 0,25; Condições de Contorno (CC) $u_x(0,y) = u_y(0;1) = 0$; Carga $\tau_0 = 150$ (Paiva *et al*. 2018).

Figura 1. Viga engastada e livre – geometria, carregamento e CC (Paiva *et al*. 2018).



A solução de referência para o deslocamento (u_y) segundo a teoria de Euler-Bernoulli, é a seguinte (I é a Inércia da seção transversal):

$$u_y\left(10;\frac{h}{2}\right) = -\left(\frac{f_y L^3}{3EI}\right)\left[1+\frac{3(1+\nu)}{L^2}\right] \qquad Eq.4$$

Efetuando-se os cálculos, têm-se que a solução de referência (s_{ref}) para o deslocamento no ponto determinado é $u_y(10,1)$ = 5,188 E-03. Foram feitas seis simulações utilizando o programa Abaqus CAE (utilizando malhas com elementos tetraédricos), com diferentes níveis de refinamento de malha. Os resultados das simulações podem ser vistos a seguir na Tabela 1. Nota-se que há correspondência entre o resultado obtido via expressão analítica e aquilo que o programa comercial apresentou, sobretudo na simulação com maior Número de Graus de Liberdade (NGL).

Tabela 1. Resultados de $u_y(10,h/2)$ obtidos via Abaqus CAE.

Malha	**nº de elementos**	**NGL**	$u_y(10,\frac{h}{2})$
Malha 01	17	39	0,594 E-03
Malha 02	944	939	4,598 E-03
Malha 03	7842	5727	4,946 E-03
Malha 04	112370	66729	5,087 E-03
Malha 05	301217	171660	5,103 E-03
Malha 06	752660	417225	5,112 E-03
s_{ref}	-	-	5,188 E-03

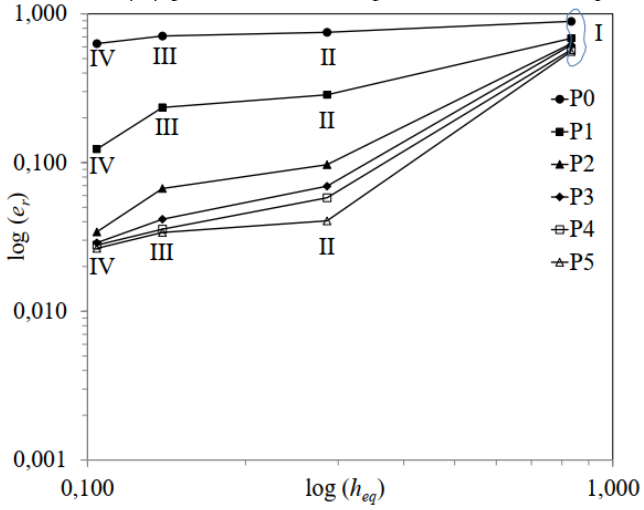
Foram feitas quatro discretizações regulares e estruturadas do modelo utilizando elementos tetraédricos (com 12, 35, 72 e 96 elementos). Todas as malhas são bem grosseiras em se tratando de uma análise 3*D*. Todos os elementos são constituídos de material homogêneo isotrópico.

Iniciando da malha mais grosseira (malha I) até a malha mais refinada (malha IV) foram realizadas simulações sem enriquecimento (denominadas *P0*), bem como simulações com aplicação de funções de enriquecimento polinomiais de graus um, dois, três, quatro e cinco (aproximações *P1*, *P2*, *P3*, *P4* e *P5*, respectivamente) utilizando polinômios de enriquecimento completos. Em respeito às condições de contorno de *Dirichlet*, os nós das arestas engastadas não foram enriquecidos. A integração numérica do domínio seguiu a regra de *Gauss-Legendre* mínima.

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A Figura 2 apresenta o gráfico correspondente ao Erro Relativo (e_r) em função do tamanho equivalente do elemento (h_{eq}), para os diferentes refinamentos de malha segundo cada ordem de enriquecimento. O e_r foi calculado com relação ao valor de referência para o deslocamento na extremidade livre, sendo h_{eq} = [(L da viga) / (nº de elementos)].

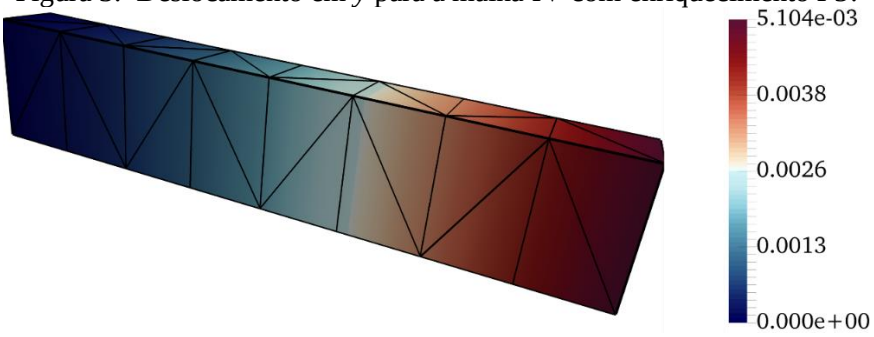
Figura 2. Erro Relativo (e_r) para cada ordem polinomial de enriquecimento.



É possível notar que as simulações sem enriquecimento apresentam elevado e_r devido ao baixo nível de refinamento. Em contrapartida, percebe-se que os valores aproxima-se da s_{ref} à medida que o grau do enriquecimento polinomial aumenta. As curvas demonstram que o método está sendo efetivo em cumprir a proposta de aproximar a resposta do PVC utilizando malhas grosseiras.

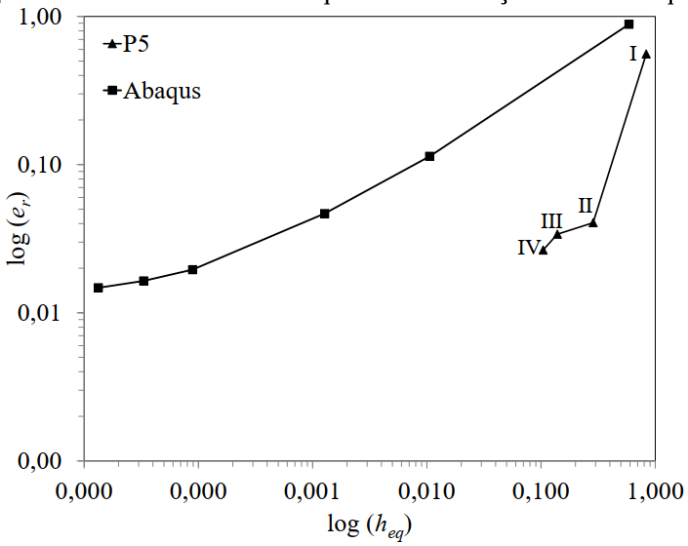
Observa-se que o MEFG potencializa a precisão da resposta, independente da ordem polinomial de enriquecimento utilizada (*P1* a *P5*). Nota-se ainda que o refinamento de malha associado ao aumento do grau polinomial das funções enriquecedoras, contribuíram para uma convergência mais rápida. A Figura 3 mostra o resultado do deslocamento na direção *y* para a malha IV com enriquecimento *P5*.

Figura 3. Deslocamento em *y* para a malha IV com enriquecimento *P5*.



A Figura .4 apresenta uma comparação entre as respostas que foram obtido via Abaqus CAE e àquelas obtidas utilizando MEFG com enriquecimento polinomial *P5*. Nota-se que os resultados com MEFG alcançaram valores de e_r próximos aos obtidos utilizando o MEF, sendo que no primeiro o NGL é menor que no segundo.

Figura 4. Comparação entre resultados do Abaqus e de simulações com enriquecimento *P5*.



CONCLUSÃO

O Método dos Elementos Finitos Generalizados apresentou grande eficiência. Observa-se que os resultados atingiram nível de aproximação razoável em relação à referência devido a utilização do enriquecimento, mesmo utilizando malhas muito grosseiras, haja vista tratar-se de uma análise 3*D*. Destaca-se a ótimo resposta para a Malha I, onde com apenas 12 elemento alcançou-se uma solução bem próxima da analítica com a utilização de enriquecimento de quinto grau.

O MEFG potencializou a precisão da resposta. Isto ficou mais claro quando comparou-se as respostas que foram obtidas via Abaqus CAE e àquelas obtidas utilizando MEFG com enriquecimento polinomial *P5*. Nota-se que os resultados com MEFG alcançaram valores de e_r próximos aos obtidos utilizando o MEF, porém, o NGL da malha mais refinada nas simulação com o software comercial (NGL = 417225), por exemplo, é cerca de 200 vezes maior que na simulação com MEFG do modelo IV com enriquecimento *P5* (NGL = 1752), constatando o grande potencial do MEFG.

AGRADECIMENTOS

Ao CNPq pela concessão de bolsa de pesquisa ao primeiro autor e ao Instituto Federal do Piauí (IFPI), instituíção de trabalho do primeiro autor.

REFERÊNCIAS

Babuška, I., G. Caloz e J. E. Osborn. “Special Finite Element Methods for a class of second order elliptic problems with rough coefficients.” Em: Journal on Numerical Analysis, 1994.

Belytschko, T.; Black, T. “Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing.” Em: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 45, 601—620, 1999.

Belytschko, T.; Gracie, R; Ventura, G. “A reviewmof extended/generalized finite element methods for material modeling.” Em: Modeling and Simulation in materials Science and Engineering, 17, 1—24, 2009.

Duarte, C. A.; Oden, J. T. “An h-p Meshless Method”. Em: Texas Intitute for Computation and Applied Mathematics. 1995.

Duarte, C. A.; Hamzeh, O. N.; Liszka, T. J.; Tworzydlo, W. W. “A generalized finite element method for the simulation of three-dimensional crack propagation.” Em: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 190, pp. 2227–2262, 2001.

Gupta, V.; Duarte, C. A. “On the enrichment zone size for optimal convergence rate of the Generalized/Extended Finite Element Method.” Em: Computers and Mathematics with Applications, 72, pp. 481–493, 2016.

Huang, T; Sukumar, N.; Prévost, J. H.“Modeling quasi-static crack growth with the extended finite element method Part II: Numerical applications.” Em: Intenational Journal of Solids and Structures, 40, pp. 7539–7552, 2003.

Melenk, J. M. “On Generalized Finite Element Methods”. Dissertation submitted to the Faculty of the Graduate School. of The University of Maryland at College Park. 1995.

Moreira, J. F. A.; Evangelista Jr, F. “Modelo bidimensional contínuo-descontínuo de falha para materiais quase-frágeis.” Em: XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computacional Methods in Engineering, 2016.

Moës, N.; Belytschko, T.. “Extended finite element method for cohesive crack growth.” Em: Engineering Fracture Mechanics, 69, 813—833, 2002

Moës, N.; Dolbow, J.; Belytschko, T. “A finite element method for crack growth without remeshing.” Em: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 46, 131—150, 1999.

Strouboulis, T.; Babuška, I.; Copps, K. “The design and analysis of the generalized finite element method.” Em: Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 181, 43—69, 2000a.

Strouboulis, T.; Copps, K.; Babuška, I. “The Generalized Finite Element Method: an example of its implementation and illustration of its performance.” Em: International Journal for Numerical Methods in Engineerin, 47, pp. 1401–1417, 2000b.

Paiva, G. O. F. de; Alves, G. de S.; Evangelista Jr, F.; Moreira, J. F. A. “Análise de estruturas utilizando o método dos elementos finitos generalizados.” Em: Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia CONTECC’2016, 2016a.

Paiva, G. O. F. de; Moreira, J. F. A. “Aplicação e análise do MEFG com enriquecimento polinomial para diferentes tipos de elementos finitos.” Em: Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia CONTECC’2018, 2018.

Paiva, G. O. F. de; Moreira, J. F. A.; Alves, G. de S.; Evangelista Jr, F. “Estudo do enriquecimento polinomial para a análise de estruturas em processo de danificação.” Em: XXXVIII Iberian Latin American Congress on Computacional Methods in Engineering, 2016b.

Pereira, J.; Duarte, C. A.; Jiao, X.; Guoy, D. “Generalized finite element method enrichment functions for curved singularities in 3D fracture mechanics problems.” Em: Computational Mechanics, 44, pp. 73–92, 2009a.

Pereira, J. P.; Duarte, C. A.; Guoy, D.; Jiao, X.“hp-Generalized FEM and crack surface representation for non-planar 3-D cracks.” Em: International Journal for Numerical Methods in Engineering, 77, pp. 601–633, 2009b.

Reddy, J. N. An Introduction to The Finite Element Method. 3rd. ed. [S.l.]: Mc Graw-Hill series in mechanical engineering, v. ISBN 0-07-246685-5, 2006.