

## **MÉTODO NUMÉRICO PARA A SOLUÇÃO NÃO LINEAR DE PÓRTICO PLANO COM CONVERGÊNCIA DE QUARTA ORDEM**

LUIZ ANTONIO FARANI DE SOUZA<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Dr. em Métodos Numéricos para Engenharia, UTFPR, Apucarana - PR, lasouza@utfpr.edu.br

Apresentado no  
Congresso Técnico Científico da Engenharia e da Agronomia – CONTECC'2017  
8 a 11 de agosto de 2017 – Belém-PA, Brasil

**RESUMO:** Análises de estabilidade estrutural usando o Método dos Elementos Finitos usualmente envolve a solução de sistemas de equações não lineares. Grande parte dos procedimentos numéricos para obtenção de caminhos de equilíbrio dos problemas estruturais com comportamento estático não linear baseia-se no método de Newton-Raphson, ao qual são acoplados métodos de continuação. Embora, algumas vezes, os resultados da estrutura antes de alcançar pontos críticos na trajetória de equilíbrio sejam suficientes para fins de projeto, determinar a resposta em um intervalo pós-crítico é essencial no domínio de grandes deslocamentos. Nesse contexto, um algoritmo em ambiente Matlab é desenvolvido a partir de um método iterativo pertencente à família de métodos de Jarratt com convergência de quarta ordem, associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear, para a análise estática de pórticos planos com não linearidade geométrica. A formulação de pórtico corrotacional é utilizada, e o comportamento constitutivo do material é descrito por um modelo elástico linear. Os resultados numéricos alcançados evidenciam o melhor desempenho do código computacional implementado, em comparação com as análises feitas com os métodos tradicionais de Newton-Raphson Padrão e Modificado.

**PALAVRAS-CHAVE:** pórtico, Elementos Finitos, Comprimento de Arco Linear, não linearidade geométrica, formulação corrotacional.

### **NUMERICAL METHOD FOR THE NON-LINEAR SOLUTION OF PLANE FRAME WITH FOURTH ORDER CONVERGENCE**

**ABSTRACT:** Structural stability analyses using the Finite Element Method usually involve solving a nonlinear equations system. A large part of the numerical procedures for obtaining the equilibrium path or load-displacement curve of structural problems with static nonlinear behavior is based on the Newton-Raphson iterative scheme to which are coupled the path-following methods. Although the structure results before reaching its critical points on the equilibrium path is sufficient for the design purposes, determining the response in a post-critical interval is essential within the large displacements domain. In this context, an algorithm in Matlab environment is developed from an iterative method belonging to Jarratt's family of methods with fourth order convergence, associated to the Linear Arc Length path-following technique, for the static analysis of frames with geometric nonlinearity. The corrotational frame formulation is used, and the constitutive behavior of the material is described by a linear elastic model. The numerical results achieved show the best performance of the implemented computational code, in comparison with the analyzes made with the Standard and Modified Newton-Raphson methods.

**KEYWORDS:** Frame, Finite Element, Linear Arc Length, geometric nonlinearity, corrotational formulation.

### **INTRODUÇÃO**

Um dos principais objetivos da Engenharia Estrutural é tornar os sistemas estruturais mais econômicos por meio da redução de seu peso e consumo de materiais, sem contudo diminuir a segurança e durabilidade. À proporção que o elemento estrutural se torna mais esbelto, a não linearidade geométrica se torna mais importante, dando origem a fenômenos que não são encontrados

em sistemas lineares. Para se realizar a análise não linear de estruturas com maior precisão, é de extrema importância que sejam empregados métodos que possam considerar, de maneira apropriada, os efeitos de grandes rotações e grandes deslocamentos, e permitam o traçado completo da trajetória de equilíbrio da estrutura, de modo a passar por pontos limites (Rodrigues et al., 2008).

O Método de Newton-Raphson é um dos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural. Nesse método é resolvido um sistema linear a cada iteração, cuja matriz de rigidez é a Jacobiana avaliada no iterado corrente. Uma das vantagens desse método é a taxa de convergência quadrática (sob condições adequadas). Até a década de 1980, os métodos iterativos que possuíam uma ordem de convergência maior que a do método de Newton exigiam o cálculo de derivadas de ordens superiores; sendo assim, quanto maior era a ordem de convergência maior era também o custo computacional do método, tornando o uso prático destes restrito a alguns poucos casos. Os autores Khattri e Abbasbandy (2011) propuseram uma técnica eficiente com convergência de quarta ordem para a solução de equação não linear, em que há duas determinações de derivadas primeiras e uma determinação da função.

Neste trabalho é proposto um algoritmo para análise estática não linear de pórticos planos por meio do Método dos Elementos Finitos, que é uma adaptação do esquema iterativo proposto por Khattri e Abbasbandy (2011) para o problema estrutural associado à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear. A análise não linear geométrica, no presente trabalho, considera os efeitos de grandes deslocamentos, grandes rotações e pequenas deformações. Para tal, adota-se a formulação corrotacional para elemento de pórtico descrita por Crisfield (1990), a qual está baseada na separação explícita dos movimentos de corpo rígido (translações e rotações) e dos movimentos deformacionais. Considera-se a relação constitutiva elástica linear para o material. Um exemplo numérico encontrado na literatura (Pórtico de Lee) é analisado com o programa Matlab, com o intuito de comprovar a eficiência do código computacional desenvolvido, comparando a solução obtida com as dos métodos clássicos de Newton-Raphson Padrão (NR) e Newton-Raphson Modificado (NRM).

## MÉTODO DE SOLUÇÃO

A técnica do Comprimento do Arco Linear foi originalmente proposta por Wempner (1971) e Riks (1972) para estruturas geometricamente não lineares. Modificações subsequentes apresentadas por Crisfield (1981) e Ramm (1981) a tornaram bastante simples para a implementação em um programa de Elementos Finitos. No método de Comprimento de Arco Linear proposto por Riks (1972, 1979), a trajetória de iteração é mantida sempre ortogonal à tangente inicial em cada passo. A expressão para o subincremento inicial do parâmetro de força  $\delta\lambda^{(1)}$  (solução predita) é dada por:

$$\delta\lambda^{(1)} = \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{u}_r\|}, \quad (1)$$

na qual  $\Delta l$  representa o incremento de Comprimento de Arco e  $\delta\mathbf{u}_r$  o vetor de deslocamentos nodais tangente. Sugerido por Ramm (1981 e 1982), no processo iterativo subsequente a equação de restrição usada para calcular  $\delta\lambda^{(k)}$  é obtida fazendo com que a solução iterativa ( $\delta\mathbf{u}^{(k)}$ ,  $\delta\lambda^{(k)}\mathbf{F}_r$ ) seja ortogonal à solução incremental da iteração anterior ( $\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$ ,  $\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r$ ), ou seja:

$$\delta\mathbf{u}^{(k)T} \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)} \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r = 0. \quad (2)$$

onde  $\delta\mathbf{u}^{(k)}$  é o vetor de deslocamentos residuais avaliado na iteração corrente,  $\mathbf{F}_r$  é o vetor de forças referência e  $\Delta\mathbf{u}^{(k-1)}$  é o vetor de deslocamentos nodais incrementais avaliado na iteração anterior. A partir da Eq. (2), uma expressão para a determinação da correção do subincremento de força ( $k > 1$ ) é obtida por:

$$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T} \delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T} \delta\mathbf{u}_r^{(k)} + \Delta\lambda^{(k-1)} \mathbf{F}_r^T \mathbf{F}_r}. \quad (3)$$

As parcelas referentes às forças residuais ( $\delta\mathbf{u}_g$ ) e às forças de referência ( $\delta\mathbf{u}_r$ ) são obtidas, respectivamente, pelas equações:

$$\delta\mathbf{u}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1} \mathbf{g}^{(k)}, \quad (4)$$

$$\delta\mathbf{u}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1} \mathbf{F}_r, \quad (5)$$

em que  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural e  $\mathbf{g}$  é o vetor de forças desequilibradas. Desprezando-se o segundo termo no denominador da Eq. (3), isto é,  $\Delta\lambda^{(k-1)}\mathbf{F}_r^T\mathbf{F}_r = 0$ , o subincremento de força  $\delta\lambda^{(k)}$  fica:

$$\delta\lambda^{(k)} = -\frac{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T}\delta\mathbf{u}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{u}^{(k-1)T}\delta\mathbf{u}_r^{(k)}} \quad (6)$$

Os parâmetros incrementais de força ( $\Delta\lambda$ ) e de deslocamento ( $\Delta\mathbf{u}$ ) no passo de força  $t+\Delta t$  e iteração  $k$  são avaliados por, respectivamente:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}, \quad (7)$$

$$\Delta\mathbf{u}^{(k)} = \Delta\mathbf{u}^{(k-1)} + \delta\mathbf{u}^{(k)}. \quad (8)$$

O sinal do incremento inicial de força  $\Delta\lambda^{(1)}$  pode ser positivo ou negativo. A escolha correta do sinal é de suma importância na definição das sequências de soluções  $(\mathbf{u}, \lambda)$  que permitam o avanço contínuo na resposta força-deslocamento. O procedimento utilizado neste trabalho consiste na análise do produto interno entre o deslocamento incremental obtido no passo de força anterior ( ${}^t\Delta\mathbf{u}$ ) e o incremento de deslocamentos nodais corrente ( $\delta\mathbf{u}_r$ ): se  ${}^t\Delta\mathbf{u}^T\delta\mathbf{u}_r > 0$ , então o preditor  $\Delta\mathbf{u}^{(1)}$  tem o mesmo sentido de  $\delta\mathbf{u}_r$ ; caso contrário o preditor tem sentido oposto. O critério de convergência é expressado pela norma da força residual por:

$$\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol}. \quad (9)$$

O método proposto por Khattri e Abbasbandy (2011), com convergência de quarta ordem, para a solução de equação não linear apresenta duas determinações de derivadas de primeira ordem e uma determinação da função:

$$y^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{2f(x^{(k-1)})}{3f'(x^{(k-1)})} \quad (10)$$

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - \frac{f(x^{(k-1)})}{f'(x^{(k-1)})} \left[ 1 + \sum_{j=1}^4 \alpha_j \left( \frac{f'(y^{(k)})}{f'(x^{(k-1)})} \right)^j \right], \quad (11)$$

na qual  $\alpha_1 = 21/8$ ,  $\alpha_2 = -9/2$ ,  $\alpha_3 = 15/8$  e  $\alpha_4 = 0$ . Considerando um sistema com  $n$  equações não lineares e  $n$  variáveis, o método proposto por Khattri e Abbasbandy (2011) pode ser adaptado para o problema estrutural não linear, obtendo-se o seguinte esquema iterativo:

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \left[ \mathbf{I} + \frac{21}{8}\Phi^{(k)} - \frac{9}{2}\Phi^{(k)2} + \frac{15}{8}\Phi^{(k)3} \right] \delta\mathbf{u}^{(k)}, \quad (12)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{u}^{(k-1)} + \frac{2}{3}\delta\mathbf{u}^{(k)}, \quad (13)$$

$$\Phi^{(k)} = \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})^{-1}\mathbf{K}(\mathbf{y}^{(k)}), \quad (14)$$

$$\delta\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{K}(\mathbf{u}^{(k-1)})^{-1}(\delta\lambda^{(k)}\mathbf{F}_r - \mathbf{g}^{(k)}). \quad (15)$$

O algoritmo para o método Khattri e Abbasbandy (2011) associado à técnica de continuação Comprimento de Arco é apresentado na Figura 1. Para a análise com o método de Newton-Raphson Padrão, as linhas 15 a 18 do algoritmo não são executadas. No método de Newton-Raphson Modificado, a matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  é avaliada no início do passo de força corrente ( $k = 1$ ), mantendo-se invariável ao longo do ciclo iterativo ( $k = 2, \dots, i_{\text{máx}}$ ) - as linhas 25, 26 e 15 a 18 do algoritmo não são executadas.

## RESULTADOS E DISCUSSÃO

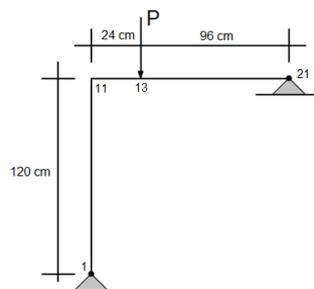
O exemplo numérico ilustrado na Figura 2, conhecido como Pórtico de Lee, é utilizado frequentemente por pesquisadores para validar a estratégia de solução não linear. A estrutura apresenta as seguintes propriedades: módulo de elasticidade  $E = 7060,8 \text{ kN/cm}^2$ ,  $A = 6,0 \text{ cm}^2$  e  $I = 2,0 \text{ cm}^4$ . A coluna é discretizada por dez elementos finitos de pórtico, enquanto a viga é discretizada por dois elementos à esquerda do ponto de aplicação da força concentrada  $P$  e oito à direita. Foram adotados, para o processo incremental-iterativo, os parâmetros: comprimento de arco inicial  $\Delta l = 2,5$ ; incremento de deslocamento máximo  $u_{\text{máx}} = 2,5$ ; número de iterações desejadas  $N_d = 4$ ; incremento de força  $\Delta P = 2,0 \text{ kN}$ ; e tolerância  $\text{tol} = 10^{-5}$ . Considera-se que a ligação entre a coluna e a viga seja rígida. Podem ser observadas na Figura 3b as trajetórias de equilíbrio (deslocamento vertical no nó 13 *versus* força  $P$ )

obtidas com o algoritmo proposto e o método de NR, havendo boa concordância com os resultados obtidos por Souza (2000). Nas trajetórias aparecem pontos limites de força (*snap-through*) e de deslocamento (*snap-back*). O ponto limite de força é um ponto extremo (ponto de máximo ou mínimo) no caminho de equilíbrio, em que a tangente é horizontal; e o ponto limite de deslocamento é um ponto no caminho de equilíbrio cuja tangente é vertical. Quando a estrutura atinge os pontos limites, a mesma pode tornar-se instável; por isso, a identificação deles é de grande importância para um projeto de engenharia. As configurações indeformada (posição inicial) e deformada do pórtico (posição final) obtidas com o algoritmo proposto são mostradas na Figura 3a.

Figura 1. Algoritmo proposto adaptado de Khattri e Abbasbandy (2011).

1. $\mathbf{u} = \mathbf{0}, \Delta \mathbf{u} = \mathbf{0}, \lambda = 0$	17. $\Phi = \mathbf{K}(\mathbf{u})^{-1} \mathbf{K}(\mathbf{y})$
2. Para $n = 1, \dots, n_{\text{máx}}$	18. $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u} + (21/8 \Phi - 9/2 \Phi^2 + 15/8 \Phi^3) \delta \mathbf{u}$
3. $\delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}(\mathbf{u})^{-1} \mathbf{F}_r$	19. $\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u} + \delta \mathbf{u}$
4. $\Delta \lambda = \Delta l / \ \delta \mathbf{u}_r\ $	20. $\Delta \lambda = \Delta \lambda + \delta \lambda$
5. Se $\Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_r < 0$	21. $\mathbf{g} = (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$
6. $\Delta \lambda = -\Delta \lambda$	22. Se $\ \mathbf{g}\  \leq \text{tol}$
7. Fim-Se	23. Terminar a execução do Para
8. $\Delta \mathbf{u}^{(1)} = \Delta \lambda \delta \mathbf{u}_r$	24. Fim-Se
9. Para $k = 2, \dots, i_{\text{máx}}$	25. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$
10. $\mathbf{g} = (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{u} + \Delta \mathbf{u})$	26. $\delta \mathbf{u}_r = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
11. $\delta \mathbf{u}_g = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$	27. Fim-Para
12. $\delta \lambda = -(\Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_g) / (\Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_r)$	28. $\mathbf{u} = \mathbf{u} + \Delta \mathbf{u}$
13. $\delta \mathbf{u} = \delta \mathbf{u}_g + \delta \lambda \delta \mathbf{u}_r$	29. $\lambda = \lambda + \Delta \lambda$
14. Se $\ \delta \mathbf{u}\  > u_{\text{máx}}$ , $\delta \mathbf{u} = (u_{\text{máx}} / \ \delta \mathbf{u}\ ) \delta \mathbf{u}$	30. $\Delta l = \Delta l (Nd/k)^{0.5}$
15. $\mathbf{y} = \mathbf{u} + 2/3 \delta \mathbf{u}$	31. Fim-Para
16. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{y})$	

Figura 2. Modelo estrutural do Pórtico de Lee.

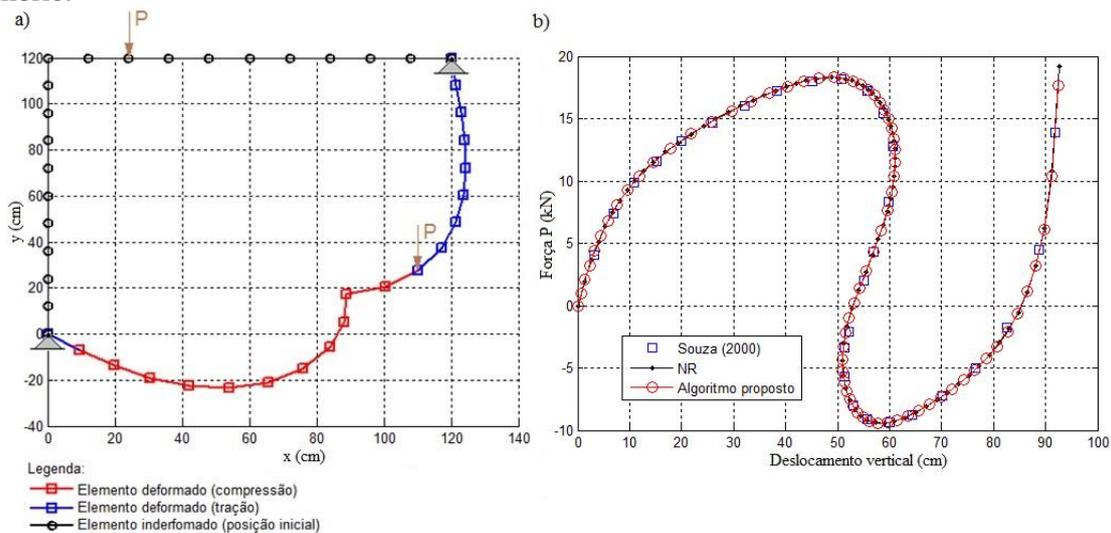


Os números totais de passos de força (NP) e interações acumuladas até a convergência para a solução (kt) e tempo de processamento (em segundos) da simulação com o algoritmo proposto, comparando-os com os métodos de NR e NRM, são apresentados na Tabela 1. Os resultados numéricos com o algoritmo proposto mostram que a convergência para a resposta do problema é alcançada com uma quantidade inferior de incrementos de força e iterações acumuladas em comparação com os métodos clássicos de NR e NRM, associados à estratégia de continuação Comprimento de Arco Linear. Isso implica na diminuição da quantidade de vezes em que os sistemas de equações lineares (gerados da discretização por Elementos Finitos) são solucionados no processo incremental e, ainda, diminuem-se as atualizações da matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  e do vetor de força interna  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  durante o ciclo iterativo. A matriz de rigidez  $\mathbf{K}$  do sistema estrutural é caracterizada por um elevado índice de esparsidade. Pode-se obter uma melhor eficiência numérica do modelo apresentado por meio de algoritmos que armazenam os coeficientes não nulos presentes na matriz e efetuam operações entre matrizes e vetores com estes coeficientes, evitando, dessa maneira, os cálculos redundantes envolvendo elementos nulos.

Tabela 1. Resultados numéricos.

Métodos	Número de Passos de Força (NP)	Número de Iterações (kt)	Tempo de Processamento (s)
NR	166	660	1,151503
NRM	442	1781	1,897034
Algoritmo proposto	71	278	0,816064

Figura 3. a) Configurações indeformada (posição inicial) e deformada do pórtico; e b) trajetórias de equilíbrio.



## CONCLUSÕES

A partir do exemplo numérico estudado, destaca-se a boa concordância entre os resultados obtidos e os da literatura no que tange à obtenção da trajetória de equilíbrio, validando o código computacional desenvolvido. A crescente simulação de modelos estruturais complexos - por meio do Método dos Elementos Finitos - tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do problema estrutural. A análise não linear efetuada com o algoritmo proposto mostrou-se promissora, visto que para o problema testado não ocorreram instabilidades numéricas durante a simulação, além de alcançar a resposta com um tempo de processamento inferior em comparação com os tempos obtidos das simulações com os métodos de NR e NRM.

## AGRADECIMENTOS

O autor agradece à UTFPR pelo apoio para o desenvolvimento desta pesquisa.

## REFERÊNCIAS

- Crisfield, M. A. A Fast Incremental/Iterative Solution Procedure that Handles Snap-Through. *Computers & Structures*, v. 13, p. 55-62, 1981.
- Crisfield, M. A. A Consistent Corotational Formulation for Non-Linear, Three-Dimensional, Beam-Elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 81, n.2, p. 131-150, 1990.
- Khatti, S.K.; Abbasbandy, S. Optimal fourth order family of iterative methods. *Mat. Vesnik*, v. 63, n. 1, p. 67-72, 2011.
- Ramm, E. Strategies for tracing the Non-linear Response Near Limit Points. *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics*, Wunderlich, W., Stein, E. and Bathe, K. -J. (eds), New York, Springer-Verlag, p. 63-89, 1981.
- Ramm, E. The Riks/Wempner Approach - An Extension of the Displacement Control Method in Non-linear Analysis. *Non-linear Computational Mechanics*, Hinton, E. et al. (eds.), Swansea, Pineridge, p. 63-86, 1982.
- Riks, E. The application of Newton's method to the problem of elastic stability. *Transactions of the ASME: Journal of Applied Mechanics*, v. 39, n. 4, p. 1060-1066, 1972.
- Rodrigues, P. F. N.; Varela, W. D.; Souza, R. A. Análise de Estratégias de Solução do Problema Não-linear. *Revista de Ciência & Tecnologia*, v. 8, n. 2, p. 36-49, 2008.
- Souza, R. M. Force-based Finite Element for Large Displacement Inelastic Analysis of Frames. Tese (Doutorado). University of California. Berkeley, EUA, 2000.
- Wempner, G. A. Discrete approximations related to nonlinear theories of solids. *International Journal of Solids and Structures*, v. 7, p.1581-1599, 1971.